

Lösungsvorschläge Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 18. Januar bis 25. Januar, 12:00 mittags
Verantwortlich: Joanna Kaczmarek

Aufgabe 1 (10 Punkte): Das Condorcet-Kriterium in BV und FV

- (a) Untersuchen Sie, ob Bucklin Voting das Condorcet-Kriterium erfüllt.
- (b) Was bedeutet die Antwort aus Aufgabenteil (a) für Fallback Voting?

Lösungsvorschlag:

- (a) (8P) Bucklin erfüllt das Condorcet-Kriterium nicht. Betrachte das folgende Gegenbeispiel: (C, V) mit $C = \{a, b, c, d\}$ und V :

$v_1 : b \ c \ d \ a$
 $v_2 : b \ c \ d \ a$
 $v_3 : c \ a \ b \ d$
 $v_4 : d \ b \ c \ a$
 $v_5 : a \ d \ b \ c$

In (C, V) gelten die folgenden Punktwerte:

	a	b	c	d
$score^1$	1	2	1	1
$score^2$	2	2	3	2

Da $maj(V) = 3$, ist c eindeutiger Level 2 BV Gewinner in (C, V) .

Es gelten jedoch die folgenden Verhältnisse im paarweisen Vergleich:

	a	b	c	d
a	-	2:3	1:4	2:3
b	3:2	-	4:1	3:2
c	4:1	1:4	-	3:2
d	3:2	3:2	2:3	-

Kandidat b ist also der Condorcet-Gewinner dieser Wahl. Also erfüllt Bucklin Voting nicht das Condorcet-Kriterium.

- (b) (2P) Da Bucklin Voting ein Spezialfall von Fallback Voting ist, ist die oben angegebene Bucklin-Wahl ebenfalls eine Fallback-Wahl. Somit dient das obige Gegenbeispiel ebenfalls als Argument, dass Fallback Voting das Condorcet-Kriterium nicht erfüllt.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Zusammenhänge zwischen Bucklin und Fallback Voting

Kann die Beantwortung der Aufgabe 1(b) auf andere Social-Choice Eigenschaften verallgemeinert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag: Ja, und zwar wie folgt: Es gilt, dass Bucklin Voting ein Spezialfall von Fallback Voting ist. Damit gilt der folgende Zusammenhang zwischen den beiden Wahlsystemen:

- Erfüllt FV ein Kriterium, so erfüllt auch BV es. (Der Beweis für FV muss auch für alle Bucklin-Wahlen gelten.)
- Erfüllt BV ein Kriterium nicht, so kann auch FV es nicht erfüllen. (Gegenbeispiele für Bucklin sind auch Gegenbeispiele für Fallback.)

Aufgabe 3 (10 Punkte): Das Konsistenz-Kriterium in FV und BV

Untersuchen Sie, ob Bucklin und Fallback Voting das Konsistenz-Kriterium erfüllen.

Lösungsvorschlag:

Bucklin Voting BV erfüllt das Konsistenz-Kriterium nicht. Betrachte das folgende Gegenbeispiel, $C = \{a, b, c, d, e, f\}$:

	Präferenz
V_1	$abcdef$
	$deabc f$
	$cfabde$
V_2	$abcdef$
	$abcdef$
	$cbade f$

Es gelten die folgenden Punktwerte in den verschiedenen Wahlen. Hierbei sei $V = V_1 \cup V_2$:

	V_1 ($\text{maj}(V_1) = 2$)						V_2 ($\text{maj}(V_2) = 2$)						V ($\text{maj}(V) = 4$)					
	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f
score^1	1	0	1	1	0	0	2	0	1	0	0	0	3	0	2	1	0	0
score^2	1	1	1	1	1	1	2	3	1	0	0	0	3	4	2	1	0	0
score^3	3	1	2	1	1	1	3	3	3	0	0	0	5	4	5	1	1	1

Dementsprechend ist a in der Unterwahl (C, V_1) Level 3 BV-Gewinner und in (C, V_2) Level 1 BV-Gewinner. In der Wahl (C, V) ist jedoch b eindeutiger Level 2 BV-Gewinner.

Damit ist gezeigt, dass weder Bucklin noch Fallback Voting das Konsistenz-Kriterium erfüllen.

Fallback Voting (nur falls gewünscht) FV erfüllt das Konsistenz-Kriterium nicht. Betrachte das folgende Gegenbeispiel, $C = \{a, b, c, d, e\}$:

	Anzahl	Präferenz
V_1	3	$a b$
	2	$d b$
V_2	2	b
	1	$d c a$
	1	$e a$
	1	c

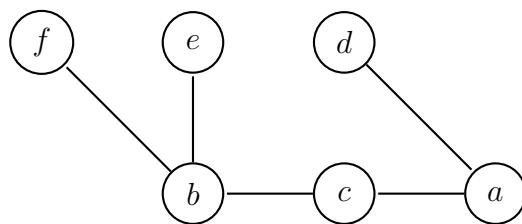
Es gelten die folgenden Punktwerte in den verschiedenen Wahlen. Hierbei sei $V = V_1 \cup V_2$:

	V_1 ($\text{maj}(V_1) = 3$)					V_2 ($\text{maj}(V_2) = 3$)					V ($\text{maj}(V) = 6$)				
	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
score^1	3	0	0	2	0	0	2	1	1	1	3	2	1	3	1
score^2	3	5	0	2	0	1	2	2	1	1	4	7	2	3	1
score^3	3	5	0	2	0	2	2	2	1	1	5	7	2	3	1

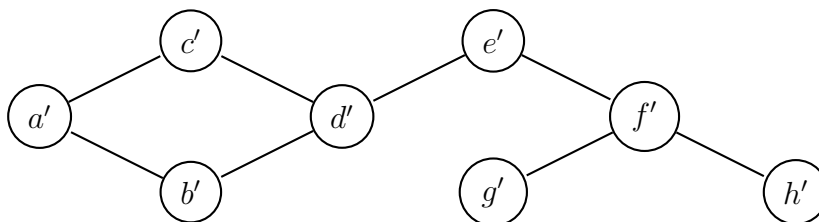
Dementsprechend ist a in den beiden Unterwahlen (C, V_1) und (C, V_2) Fallback-Gewinner. In der Wahl (C, V) ist jedoch b eindeutiger Fallback-Gewinner.

Aufgabe 4 (15 Punkte): DOMINATING SET und BV-DCPV

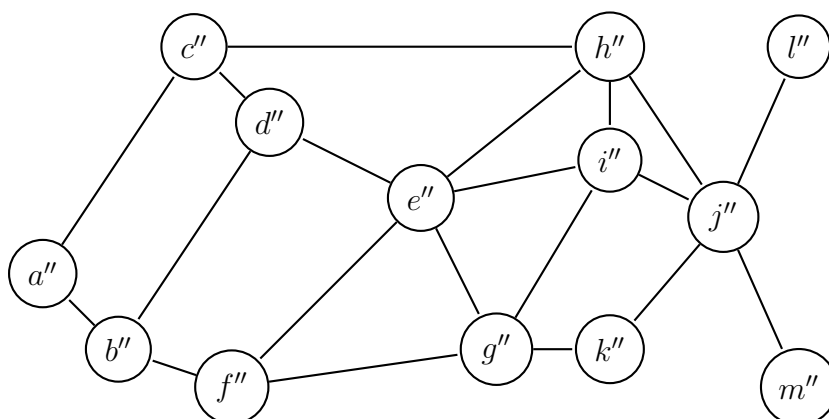
Seien G_1 , G_2 und G_3 die folgenden Graphen:



$G_1 = (V_1, E_1)$



$G_2 = (V_2, E_2)$



$G_3 = (V_3, E_3)$

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Instanzen des Problems DOMINATING SET eine JA-Instanz oder eine NEIN-Instanz sind:

- $I_1 = (G_1, 3)$,
- $I_2 = (G_2, 2)$,
- $I_3 = (G_3, 3)$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) In der Vorlesung wurde ein Beweis von NP-Schwere der BV-DCPV mithilfe einer Reduktion von DOMINATING SET auf BV-DCPV gezeigt. Definieren Sie die Wahl aus dem Beweis für die Instanz I_3 aus der Teilaufgabe (a). Geben Sie auch die Scores-Tabelle mit den konkreten Werten für alle Kandidaten an und bestimmen Sie, welche Kandidaten gewinnen.

- (c) Existiert eine erfolgreiche Kontrolle in (b)? Falls ja, führen Sie die Kontrolle durch. Ansonsten zeigen Sie, dass die Kontrolle hier unmöglich ist.

Lösungsvorschlag:

(a) (4P)

- I_1 ist eine JA-Instanz. Die Menge $D_1 = \{a, b\}$ ist eine dominierende Menge mit $|D_1| = 2 < 3$.
- I_2 ist eine NEIN-Instanz. Der Knoten f' müsste in der dominierenden Menge D_2 sein, sonst müssten sowohl g' als auch h' in D_2 enthalten sein und damit die anderen Knoten mit mindestens einem Knoten in der Menge verbunden sein könnten, müsste $|D_2| > 2$ gelten. Wenn $f' \in D_2$, bleiben noch die Knoten a' , b' , c' und d' , die keinen Nachbar in D_2 haben. Weil es hier keinen Knoten gibt, der zu allen anderen drei Knoten adjazent ist, braucht D_2 mehr als nur noch einen Knoten enthalten, um eine dominierende Menge zu sein.
- I_3 ist eine JA-Instanz. Die Menge $D_3 = \{a'', e'', j''\}$ ist eine dominierende Menge mit $|D_3| = 3$.

(b) (5P) Aus I_3 definieren wir

$$V_3 = \{a'', b'', c'', d'', e'', f'', g'', h'', i'', j'', k'', l'', m''\}$$

mit $b_1 = a'', b_2 = b'', \dots, b_{13} = m''$,

$$n = |V_3| = 13$$

und

$$k = 3.$$

Daraus definieren wir jetzt die Wahl (C, V) . Wir fangen mit der Menge der Kandidaten an:

$$C = V_3 \cup D \cup E \cup F \cup H \cup \{c, u, v, w, x, y\}$$

wobei

$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_{(k-1)(n+4)}\} = \{d_1, d_2, \dots, d_{34}\},$$

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_{2(k+n)}\} = \{e_1, e_2, \dots, e_{32}\},$$

$$F = \{f_1, f_2, \dots, f_{3n}\} = \{f_1, f_2, \dots, f_{39}\}$$

und

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_{n^2}\} = \{h_1, h_2, \dots, h_{169}\},$$

also gibt es 293 Kandidaten und der Kandidat c ist der gewählte Kandidat. Sei auch $A = D \cup E \cup F \cup H$. Jetzt definieren wir die Menge der Wähler. Es gilt $|V| = 2k + 2n = 32$ und

		Anzahl	Präferenz
(1)	Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$, sei $F_i = \{f_{3(i-1)+1}, f_{3(i-1)+2}, f_{3i}\}$, $H_i = \{h_{13(i-1)+1}, \dots, h_{13(i-1)+ N[b_i] }\}$	1	$F_i (V_3 \setminus N[b_i]) H_i y w$ $(N[b_i] \cup A \setminus (F_i \cup H_i))$ $u v c x$
(2)		1	$x w c V_3 u v A y$
(3)	Für jedes $i \in \{1, 2\}$, sei $D_i = \{d_{17(i-1)+1}, \dots, d_{17i}\}$,	1	$x D_i$ $(V_3 \cup (A \setminus D_i)) u v y w c$
(4)	Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, 16\}$, sei $E_i = \{e_{2i-1}, e_{2i}\}$,	1	$c E_i x y$ $(V_3 \cup (A \setminus E_i)) u v w$

Also $\text{maj}(V) = 17$ und in dieser Wahl bekommen wir o. B. d. A. die folgende Scores-Tabelle:

Kandidat	score^1	score^2	score^3
c	16	16	17
w	0	1	1
x	3	3	3
$f_{3(i-1)+1}$	1	1	1
$f_{3(i-1)+2}$	0	1	1
f_{3i}	0	0	1
$d_{17(j-1)+1}$	0	1	1
$d_{17(j-1)+2}$	0	0	1
e_{2l-1}	0	1	1
e_{2l}	0	0	1
alle andere Kandidaten	0	0	0

für $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$, $j \in \{1, 2\}$ und $l \in \{1, 2, \dots, 16\}$. Daher ist der Kandidat c ein eindeutiger Level 3 Gewinner in der Wahl (C, V) .

- (c) (6P) Es existiert eine erfolgreiche Kontrolle, weil der Kandidat c ein eindeutiger Gewinner in der Wahl (C, V) ist und es eine dominierende Menge D_3 in dem Graph G_3 gibt. Seien v_1, v_2, v_3 die Wähler aus (1), die mithilfe der Kandidaten $b_i \in D_3$ definiert wurden, sei v_4 der Wähler aus (2) und seien v_5 und v_6 die Wähler aus (3). Seien $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ und $V_2 = V \setminus V_1$, also sind V_1 und V_2 eine Partitionierung von V mit $|V_1| = 6$ und $|V_2| = 26$. Daher, $\text{maj}(V_1) = 4$ und $\text{maj}(V_2) = 14$. Im Level 1 bekommt der Kandidat c schon 16 Stimmen in (C, V_2) , deswegen ist er dort ein eindeutiger Gewinner. Jetzt betrachten wir die Scores in der Wahl (C, V_1) :

Kandidat	$score^1$	$score^2$	$score^3$
c	0	0	1
w	0	1	1
x	3	3	3
$f_{3(i-1)+1}$	1	1	1
$f_{3(i-1)+2}$	0	1	1
f_{3i}	0	0	1
$d_{17(j-1)+1}$	0	1	1
$d_{17(j-1)+2}$	0	0	1
alle andere Kandidaten	0	0	0

für $i \in \{1, 5, 10\}$ und $j \in \{1, 2\}$. In den nächsten 13 Levels bekommen die Kandidaten aus V_3 maximal 2 Stimmen und die Kandidaten aus H maximal eine Stimme von den Wählern v_1, v_2 und v_3 . Die Kandidaten aus V_3 bekommen noch eine Stimme von v_3 und die Kandidaten $d_{17(j-1)+3}, \dots, d_{17j-2}$ eine Stimme von v_5, v_6 . D.h. im Level 16 haben alle Kandidaten einen Score kleiner als 4. Dann gilt

Kandidat	$score^{17}$	$score^{18}$
c	1	1
w	1	4
x	3	3
y	3	3
b_l	≤ 3	≤ 3
alle andere Kandidaten	≤ 1	≤ 1

für $l \in \{1, 2, \dots, 13\}$. Also ist der Kandidat w der eindeutige Gewinner in (C, V_2) .

In der Wahl $(\{c, w\}, V)$ bekommen beide Kandidaten 16 Stimmen im Level 1 und 32 Stimmen im Level 2, also ist c kein alleiniger Gewinner mehr.