Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Wintersemester 2021/22
Übungsblatt 11

Lösungsvorschläge
Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 21. Dezember bis 11. Januar, 12:00 mittags
Verantwortlich: Joanna Kaczmarek

Aufgabe 1 (15 Punkte): PV-CCAC

Das Wahlsystem Plurality Voting ist resistent gegenüber der konstruktiven Kontrolle durch Hinzufügen von Kandidaten. Die NP-Schwere des entsprechenden Kontrollproblems kann durch eine Reduktion von Hitting Set gezeigt werden.

Hitting Set (HS)	
Gegeben:	Eine Menge $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, wobei $m \geq 1$, eine Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq B$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$ und eine positive ganze Zahl k.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $B' \subseteq B$ mit $\|B'\| \leq k$ derart, dass B' mit jeder Teilmenge aus $\mathcal{S}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat?

Für die Reduktion wird wie folgt aus einer Hitting Set-Instanz $(B, \mathcal{S}, k)$ eine Plurality-Wahl $(C \cup D, V)$ konstruiert: Die Menge C der registrierten Kandidaten sei

$$C = \{c, c', d\}.$$

Die Menge D der Füllkandidaten sei

$$D = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}.$$

Es sei nun c der ausgezeichnete Kandidat und die Wählerliste V bestehe aus den folgenden $7n - k - 2$ Stimmen über $C \cup D$:

(1)		$2n - m$	Wähler:	$c \cdots$
(2)		$2n - m - 1$	Wähler:	$c' \cdots$
(3)		$2n - k - 1$	Wähler:	$d \cdots$
(4)	Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$	1	Wähler:	$S_i \, c' \cdots$
(5)	Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$	1	Wähler:	$b_j \, c \cdots$
(6)	Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$	1	Wähler:	$b_j \, c' \cdots$

Vervollständigen Sie den Resistenzbeweis.

Lösungsvorschlag: Punktwerte in (C, V):

c	c'	d
$2n$	$3n-1$	$2n-k-1$

Kandidat c' ist folglich der eindeutige Plurality-Gewinner der Wahl (C, V) für $n > 1$ und für $n = 1$ gibt es keinen eindeutigen Gewinner.

Wir zeigen: Es gibt ein Hitting-Set $B' \subseteq B$ für $\mathcal{S}$ der Größe höchstens k genau dann, wenn Kandidat c durch das Hinzufügen von höchstens k Kandidaten zum eindeutigen Plurality-Gewinner der resultierenden Wahl gemacht werden kann.

Von links nach rechts: Es sei $B' \subseteq B$ ein Hitting-Set der Größe $k' \leq k$ für $\mathcal{S}$. Füge nun diese k' Kandidaten zu C hinzu.

Damit rückt c' in Gruppe (4) in allen Stimmen mindestens auf den zweiten Platz und c und c' verlieren k' Punkte aus den Wählergruppen (5) und (6). Wir haben dann die folgenden Punktwerte in $(C \cup B', V)$:

c	$b_j \in B'$	c'	d
$2n-k'$	$\leq n+2$	$2n-k'-1$	$2n-k-1$

Damit ist c eindeutiger Gewinner der resultierenden Wahl, wenn $n \geq 4$.

Von rechts nach links: Angenommen, es ist möglich, Kandidat c durch das Hinzufügen von höchstens k Kandidaten zum eindeutigen Plurality-Gewinner der resultierenden Wahl zu machen (- es sei $B' \subseteq B$ die Menge der hinzugefügten Kandidaten). Durch das Hinzufügen von Kandidaten kann sich der Punktwert der Kandidaten in C nur verschlechtern oder gleich bleiben.
Aufgrund der Wählergruppe (5) gilt

$$score_{(C \cup B', V)}(c) = 2n - \|B'\|.$$

Ohne die Veränderung in der Gruppe (4) zu betrachten gilt für c' folgendes:

$$score_{(C \cup B', V)}(c') = 3n - \|B'\| - 1.$$

Das bedeutet, dass c' in der Gruppe (4) in jeder Stimme mindestens auf den zweiten Platz rutschen muss, damit c die Wahl gewinnen kann. Folglich muss B' ein Hitting-Set für $\mathcal{S}$ sein.
Damit c die resultierende Wahl gewinnt, muss gelten:

$$\begin{aligned} score_{(C \cup B', V)}(c) &> score_{(C \cup B', V)}(d) \\ 2n - \|B'\| &> 2n - k - 1 \\ \|B'\| &\leq k \end{aligned}$$

Also ist B' ein Hitting-Set der Größe höchstens k für $\mathcal{S}$ und die Resistenz ist damit gezeigt.

Aufgabe 2 (10 Punkte): AV-DCPV TP

Gegeben sei die Approval-Wahl (C, V) mit der Kandidatenmenge $C = \{a, b, c, d\}$ und den folgenden 8 Wählern in V:

$$\begin{array}{llll} v_1: & (1,0,0,1) & v_5: & (0,0,1,0) \\ v_2: & (1,0,0,0) & v_6: & (0,0,1,1) \\ v_3: & (1,0,0,0) & v_7: & (0,0,0,1) \\ v_4: & (0,0,1,0) & v_8: & (0,0,0,1) \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie den Approval-Gewinner in der Wahl (C, V).

(b) Wenden Sie den aus der Vorlesung bekannten Algorithmus für AV-DCPV TP auf die Eingabe $((C, V), d)$ an.

Lösungsvorschlag:

(a) (2P) Approval-Scores in (C, V):

a	b	c	d
3	0	3	4

Kandidat d ist eindeutiger Approval-Gewinner in (C, V).

(b) (8P) Prüfe zunächst die trivialen Fälle:

- $C \neq \{d\}$
- d ist eindeutiger Gewinner in (C, V)
- $\|C\| = 4 \neq 2$

TP-Loop:

Paar a, b: Es gilt:

$$W_d = 3,\ L_d = 0,\ S_a = 2,\ S_b = 0,\ S_{ad} = 1,\ S_{bd} = 0.$$

Da $S_b = 0$, sind diese Kandidaten hoffnungslos. Gehe zum nächsten Paar.

Paar a, c: Es gilt:

$$W_d = 2,\ L_d = 0,\ S_a = 2,\ S_c = 2,\ S_{ad} = 1,\ S_{cd} = 1.$$

$W_d - L_d = 2 - 0 = 2 = 2 = 2 + 2 - 2 = S_a + S_c - 2$. Es gibt also eine erfolgreiche Partitionierung:

$$V_1 = (\underbrace{v_1}_{S_{ad}}, \underbrace{v_2, v_3}_{S_a}, \underbrace{v_7}_{1\,W_d}) \qquad V_2 = (v_4, v_5, v_6, v_8).$$

Aufgabe 3 (15 Punkte): Fallback Voting and Bucklin Voting

Gegeben sei die Fallback-Wahl (C, V) mit 5 Kandidaten $C = \{a, b, c, d, e\}$ und 5 Wählern in V:

$$\begin{array}{llll} v_1: & b & a & \\ v_2: & b & c & d \\ v_3: & c & e & d \\ v_4: & a & d & \\ v_5: & d & e & \end{array}$$

Hierbei sind die angegeben Kandidaten in den Stimmen diejenigen Kandidaten, die die Zustimmung des entsprechenden Wählers bekommen. Die restlichen Kandidaten werden in den Stimmen nicht aufgeführt.

(a) Bestimmen Sie den oder die Fallback-Gewinner in der Wahl (C, V).

(b) Wie müssten die Stimmen der Wähler zu vollständigen Präferenzen ergänzt werden, damit Kandidat c eindeutiger Bucklin-Gewinner in der dadurch entstehenden Bucklin-Wahl wäre?

(c) Kann es für Kandidat a eine erfolgreiche Erweiterung der Präferenzen wie in Aufgabe (b) geben?

Lösungsvorschlag:

(a) (3P) Es gilt $maj(V) = 3$. Fallback-Scores in (C, V):

	a	b	c	d	e
$score^1$	1	2	1	1	0
$score^2$	2	2	2	2	2
$score^3$	2	2	2	4	2

Kandidat d erreicht als einziger Kandidat auf der niedrigsten Stufe die absolute Mehrheit von 4 Stimmen und ist eindeutiger Level 3 FV-Gewinner in (C, V).

(b) (6P) Damit c eindeutiger BV-Gewinner wird, muss c spätestens auf der dritten Stufe eine absolute Mehrheit erreichen und mehr Punkte haben als d. Da d auf der dritten Stufe 4 Punkte erreicht, muss c in den Stimmen von v_1, v_4, v_5 auf dem dritten Platz stehen. Die restlichen Platzierungen können beliebig gewählt werden; ein Beispiel:

$$\begin{array}{lccccc} v_1: & b & a & c & d & e \\ v_2: & b & c & d & e & a \\ v_3: & c & e & d & a & b \\ v_4: & a & d & c & e & b \\ v_5: & d & e & c & b & a \end{array}$$

Bucklin Scores in dieser Wahl:

	a	b	c	d	e
$score^1$	1	2	1	1	0
$score^2$	2	2	2	2	2
$score^3$	2	2	5	4	2

Damit hat c auf der dritten Stufe eine absolute Mehrheit und den höchsten Punktwert.

(c) (6P) Kandidat a müsste ebenso wie Kandidat c in Aufgabenteil (b) auf der dritten Stufe eine absolute Mehrheit erreichen. Dies ist möglich, wenn a in v_5 auf dem dritten Platz positioniert wird. a kann dadurch jedoch nur einen Punktwert von 3 erreichen und damit Kandidat d nicht schlagen. Es gibt also keine Erweiterung, die a zum eindeutigen Bucklin-Gewinner machen würde.