Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Wintersemester 2021/22
Übungsblatt 10

Lösungsvorschläge

Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 14. Dezember bis 21. Dezember, 12:00 mittags
Verantwortlich: Joanna Kaczmarek

Aufgabe 1 (12 Punkte): PV-CCAUC

(a) Entscheiden Sie, ob die HS Instanzen $(B_1, \mathcal{S}_1, k_1)$ und $(B_2, \mathcal{S}_2, k_2)$ JA-Instanzen für HS sind. Es seien

$B_1 = \{b_1, \ldots, b_6\}$, $\mathcal{S}_1 = \{\{b_2, b_3\}, \{b_4\}, \{b_1, b_2\}, \{b_3, b_6\}\}$ und $k_1 = 3$,
$B_2 = \{b_1, \ldots, b_7\}$, $\mathcal{S}_2 = \{\{b_1\}, \{b_3, b_5\}, \{b_2, b_4\}, \{b_5, b_7\}, \{b_3, b_7\}, \{b_6\}\}$ und $k_2 = 4$.

(b) Aus einer HS Instanz $(B, \mathcal{S}, k)$ kann wie folgt eine P(lurality)V(oting)-CCAUC Instanz (C, D, V, p) konstruiert werden: $C = \{c, d, p\}$ ist die Menge der qualifizierten Kandidaten, $D = B$ ist die Menge der unqualifizierten Kandidaten. Die Wählerliste über $C \cup D$ sei wie folgt:

(1)		$2n - m$	Wähler:	$p \ldots$
(2)		$2n - m - 1$	Wähler:	$c \ldots$
(3)		$2n - k - 1$	Wähler:	$d \ldots$
(4)	Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$, wenn $S_i = \{b_1, \ldots, b_l\}$	1	Wähler:	$b_1 \ldots b_l \, c \ldots$
(5)	Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$	1	Wähler:	$b_j \, p \ldots$
		1	Wähler:	$b_j \, c \ldots$

Konstruieren Sie wie angegeben die PV-CCAUC-Instanz (C, D, V, p) aus der HS Instanz $(B_1, \mathcal{S}_1, k_1)$. Bestimmen Sie den Gewinner in der Wahl (C, V) und bestimmen Sie eine erfolgreiche Kontrolle durch Hinzufügen von Kandidaten aus D.

Lösungsvorschlag:

(a) (4P) $(B_1, \mathcal{S}_1, k_1)$ ist eine JA-Instanz mit $B_1' = \{b_2, b_3, b_4\}$.

$(B_2, \mathcal{S}_2, k_2)$ ist eine NEIN-Instanz, denn: Um S_1 und S_6 abzudecken, müssen b_1 und b_6 in B_2' enthalten sein. Damit S_3 getroffen wird, muss entweder b_2 oder

b_4 in B_2' enthalten sein. Es bleibt also noch ein Element über, um die Mengen S_2, S_4 und S_5 zu treffen. Da $S_2 \cap S_4 \cap S_5 = \emptyset$ gilt, ist dies nicht möglich. Ein hitting set für $\mathcal{S}_2$ muss also mindestens die Größe 5 haben.

(b) (8P) Es gilt: $n = 4, m = 6$ und $k = 3$. Die Kandidatenmengen sind $C = \{c, d, p\}$ und $D = \{b_1, \ldots, b_6\}$. Die Wählerliste V über $C \cup D$ bzw. C ist von folgender Form:

				über $C \cup D$	über C
(1)		$2 \cdot 4 - 6 = 2$	Wähler:	$p \ldots$	$p \ldots$
(2)		$2 \cdot 4 - 6 - 1 = 1$	Wähler:	$c \ldots$	$c \ldots$
(3)		$2 \cdot 4 - 3 - 1 = 4$	Wähler:	$d \ldots$	$d \ldots$
(4)		1	Wähler:	$b_2\, b_3\, c \ldots$	$c \ldots$
		1	Wähler:	$b_4\, c \ldots$	$c \ldots$
		1	Wähler:	$b_1\, b_2\, c \ldots$	$c \ldots$
		1	Wähler:	$b_3\, b_6\, c \ldots$	$c \ldots$
(5)	Für jedes $j \in \{1, \ldots, 6\}$	1	Wähler:	$b_j\, p \ldots$	$p \ldots$
		1	Wähler:	$b_j\, c \ldots$	$c \ldots$

Damit gelten die folgenden Punktwerte in (C, V):

	p	c	d
Punktwert	8	11	4

Es gilt, dass in (C, V) Kandidat c eindeutiger Gewinner mit einem Punktwert von 11 ist. Füge nun die Kandidaten $D' = \{b_2, b_3, b_4\}$ hinzu. Die Wählerliste sieht dann wie folgt aus:

				über $C \cup D'$
(1)		$2 \cdot 4 - 6 = 2$	Wähler:	$p \ldots$
(2)		$2 \cdot 4 - 6 - 1 = 1$	Wähler:	$c \ldots$
(3)		$2 \cdot 4 - 3 - 1 = 4$	Wähler:	$d \ldots$
(4)		1	Wähler:	$b_2\, b_3\, c \ldots$
		1	Wähler:	$b_4\, c \ldots$
		1	Wähler:	$b_2\, c \ldots$
		1	Wähler:	$b_3\, c \ldots$
(5)	Für jedes $j \in \{1, 5, 6\}$	1	Wähler:	$p \ldots$
		1	Wähler:	$c \ldots$
(5)	Für jedes $j \in \{2, 3, 4\}$	1	Wähler:	$b_j\, p \ldots$
		1	Wähler:	$b_j\, c \ldots$

Damit gelten die folgenden Punktwerte:

	p	c	d	b_2	b_3	b_4
Punktwert	5	4	4	4	3	3

Damit ist p eindeutiger Gewinner der Wahl $(C \cup D', V)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Anfälligkeit im Condorcet-Wahlsystem

Zeigen Sie, dass das Condorcet-Wahlsystem anfällig

(a) für CCDC, CCPC und CCPC mit Stichwahl, und

(b) für alle bekannten Typen der konstruktiven Wählerkontrolle ist.

Lösungsvorschlag:

(a) (5P)

- CCDC: Sei (C, V) eine Wahl mit der Menge der Kandidaten $C = \{a, b, c, d\}$, der Menge der Wähler $V = (v_1, v_2, v_3)$ und den Präferenzlisten

$$\begin{aligned} v_1 &: \quad a\,b\,d\,c \\ v_2 &: \quad d\,a\,b\,c \\ v_3 &: \quad b\,d\,a\,c \end{aligned}$$

  In (C, V) gibt es einen Zyklus zwischen a, b, d und somit keinen Condorcet-Gewinner. Sei a unser gewählter Kandidat. Wenn wir den Kandidat d aus der Wahl löschen, wird a zu einem Condorcet-Gewinner.

- CCPC: Sei (C', V') eine Wahl mit der Menge der Kandidaten $C' = \{a, b, c, d, e\}$, der Menge der Wähler $V' = (v_1, v_2, v_3)$ und den Präferenzlisten

$$\begin{aligned} v_1 &: \quad c\,b\,a\,e\,d \\ v_2 &: \quad e\,c\,d\,a\,b \\ v_3 &: \quad b\,a\,d\,e\,c \end{aligned}$$

  In (C', V') gibt es keinen Condorcet-Gewinner. Sei b unser gewählte Kandidat. Partitioniere C' in (C'_1, C'_2) mit $C'_1 = \{c, e\}$ und $C'_2 = \{a, b, d\}$. Dann gewinnt in (C'_1, V') der Kandidat e und wir bekommen eine neue Wahl $(C'_2 \cup \{e\}, V')$ mit

$$\begin{aligned} v_1 &: \quad b\,a\,e\,d \\ v_2 &: \quad e\,d\,a\,b \\ v_3 &: \quad b\,a\,d\,e \end{aligned}$$

  wo der Kandidat b ein Condorcet-Gewinner ist.

- CCPC mit Stichwahl: Das Gegenbeispiel bei CCPC ist auch bei CCPC mit Stichwahl ein Gegenbeispiel, denn in (C_1', V') gewinnt e, in (C_2', V') gewinnt b und es ist einfach zu merken, dass b auch in $(\{b, e\})$ gewinnt.

(b) (3P) Aus der Vorlesung wissen wir, dass Condorcet anfällig für DCPV, DCDV, DCAV ist.

Daraus folgt direkt die Anfälligkeit für CCAV und CCDV. Es bleibt die Anfälligkeit durch CCPV zu zeigen:

Die Wahl (C, V) aus der Teilaufgabe (a) ist hier ebenfalls ein Gegenbeispiel. Also gibt es in (C, V) keinen Condorcet-Gewinner. Partitioniere V in (V_1, V_2) mit $V_1 = (v_1)$ und $V_2 = (v_2, v_3)$.

In (C, V_1) ist a der Condorcet-Gewinner. In (C, V_2) hingegen gibt es keinen Condrocet-Gewinner. Folglich ist a der einzige Kandidat in der finalen Wahl und somit der Gewinner der 2-Stufenwahl.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Immunität in Approval Voting

Zeigen Sie, dass das Wahlsystem *Approval Voting* immun gegenüber konstruktiver Kontrolle durch Partitionieren der Kandidaten (sowohl mit als auch ohne Stichwahl) im Modell TP ist.

Lösungsvorschlag: Es sei (C, V) eine Approval-Wahl und $c \in C$ sei nicht der eindeutige Approval-Gewinner. Es sei $D \subseteq C$ die Gewinnermenge in (C, V).
Es gilt also

$$\forall_{d \in D}\ score_{(C,V)}(d) \geq score_{(C,V)}(c)$$

und

$$\forall_{d \in D} \forall_{e \in C \setminus (D \cup \{c\})}\ score_{(C,V)}(d) > score_{(C,V)}(e).$$

Wenn sich die Kandidatenmenge verkleinert, ändert sich in AV der Score der übrigen Kandidaten nicht. Dementsprechend können die Kandidaten aus D nicht daran gehindert werden, in die finale Wahl einzuziehen (sie sind immer mindestens uneindeutige Gewinner in der Unterwahl, an der sie teilnehmen, weil das Modell TP angenommen wurde). Nehmen sie jedoch an der finalen Wahl teil, so kann Kandidat c sie nicht strikt schlagen und somit nicht eindeutiger Gewinner der finalen Wahl sein. AV ist also immun gegenüber diesen Kontrolltypen.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Plurality-CCAV

Zeigen Sie, dass Plurality

(a) anfällig für CCAV ist,

(b) verletzbar durch CCAV ist.

Lösungsvorschlag:

(a) (4P) Betrachte die PLURALITY-CCAV-Instanz $(C, V, W, a, 3)$ mit $C = \{a, b\}$, $V = (v_1, v_2)$, $W = (v_3, v_4, v_5)$ mit

$$\begin{array}{lll} v_1: & b & a \\ v_2: & b & a \\ v_3: & a & b \\ v_4: & a & b \\ v_5: & a & b \end{array}$$

$k = 3$ und dem ausgezeichneten Kandidaten a. Dann kann a zum eindeutigen Gewinner gemacht werden.

(b) (6P) Sei p der ausgezeichnete Kandidat und k die maximale Anzahl der Wähler, die hinzugefügt werden können.

- Prüfe, ob p schon der eindeutige Plurality-Gewinner ist. Wenn ja, gebe „möglich“ aus.
- Falls der ausgezeichnete Kandidat p um mehr als k Stimmen verliert, dann gebe „unmöglich“ aus.
- Falls p mit $l \leq k$ Stimmen verliert, durchsuche W nach l Wählern, die p an erste Stelle setzen. Existieren diese Wähler, kann p zum Gewinner gemacht werden. Andernfalls ist dies nicht möglich.

Der Algorithmus arbeitet offensichtlich in polynomieller Zeit (in der Eingabelänge).