Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Wintersemester 2021/22
Übungsblatt 9

Lösungsvorschläge

Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 07. Dezember bis 14. Dezember, 12:00 mittags
Verantwortlich: Joanna Kaczmarek

Aufgabe 1 (10 Punkte): Non-monotonicity in STV

Das aus der Vorlesung bekannte Monotonie-Kriterium kann auch wie folgt definiert werden:

Ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ heißt monoton, wenn für jede $\mathcal{E}$-Wahl gilt: Ist Kandidat c kein Gewinner der Wahl, so kann er nicht zum Gewinner gemacht werden, indem die Position von c in einigen Stimmen verschlechtert wird.

Es lässt sich das folgende Entscheidungsproblem definieren:

NON-MONOTONICITY	
Gegeben:	Eine $\mathcal{E}$-Wahl (C, V) für ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ und ein ausgezeichneter Kandidat c, der nicht $\mathcal{E}$-Gewinner der Wahl (C, V) ist.
Frage:	Gibt es ein $V' \subseteq V$, sodass c zum Gewinner gemacht werden kann, wenn die Position von c in den Stimmen in V' verschlechtert wird?

Für das Wahlsystem STV sei nun der folgende Ansatz für eine Reduktion von X3C auf NON-MONOTONICITY gegeben:

Es sei $(B, \mathcal{S})$ eine X3C Instanz mit $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{3m}\}$ und einer Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $\|S_i\| = 3$ und $S_i \subseteq B$ für alle i, $1 \leq i \leq n$. Wir konstruieren daraus die STV-Wahl (C, V) mit der Kandidatenmenge

$$C = \{c\} \cup \{b_0, b_1, \ldots, b_{3m}\} \cup \{d_1, d_2, \ldots, d_n\} \cup \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_n\} \cup \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \cup \{w, w'\}$$

und der folgenden Wählerliste V:

(1)		$12n$	Wähler:	$c\,w...$
(2)		$12n-1$	Wähler:	$w\,c...$
(3)		$12n$	Wähler:	$w'\,w\,c...$
(4)		$10n+2m$	Wähler:	$b_0\,w\,c...$
(5)	Für jedes $j \in \{1,\dots,3m\}$	$12n-2$	Wähler:	$b_j\,w\,c...$
(6)	Für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$	$12n$	Wähler:	$g_i\,w\,c...$
(7)	Für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$	$6n$	Wähler:	$d_i\,\bar{d}_i\,w\,c...$
	und wenn $S_i = \{b_x, b_y, b_z\}$, dann	2	Wähler:	$d_i\,b_x\,w...$
		2	Wähler:	$d_i\,b_y\,w...$
		2	Wähler:	$d_i\,b_z\,w...$
(8)	Für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$	$6n$	Wähler:	$\bar{d}_i\,d_i\,w\,c...$
		2	Wähler:	$\bar{d}_i\,b_0\,w\,c...$
(9)	Für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$	1	Wähler:	$c\,d_i...$
		6	Wähler:	$c\,\bar{d}_i...$

(a) Zeigen Sie, dass c die Wahl (C, V) nicht gewinnt.

(b) Es sei eine Indexmenge $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ gegeben. Wir vertauschen in den Stimmen der Wählergruppe (9) nun für alle $i \in I$ die Position von c und d_i bzw. $\bar{d}_i$ und es sei V' die so veränderte Wählerliste. Zeigen Sie, dass c die Wahl (C, V') gewinnt, wenn I die Indexmenge einer exakten Überdeckung für B ist.

Lösungsvorschlag:

(a) In (C, V) sehen die Punktwerte in den Runden wie folgt aus:

	1. Runde	2. Runde	3. Runde
c	$19n$	$19n$	$19n$
w	$12n-1$	$12n-1$	$3m(12n-2)+12n-1$
w'	$12n$	$12n$	$12n$
b_0	$10n+2m$	$12n+2m$	$12n+m$
b_j	$12n-2$	$12n-2$	-
g_i	$12n$	$12n$	$12n$
d_i	$6n+6$	$12n+6$	$12n+6$
$\bar{d}_i$	$6n+2$	-	-

Kandidat c kann ab hier Kandidat w nicht mehr einholen. c wird also vor w ausscheiden und somit kein Gewinner der Wahl (C, V) sein.

(b) Es sei nun $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ die Indexmenge einer exakten Überdeckung für B. Das heißt, dass $\|I\| = m$ gilt. Zudem gilt folgendes für die Wahl (C, V') :

	1. Runde	2. Runde	3. Runde
c	$12n + 7(n - m)$	$12n + 7(n - m)$	$12n + 7(n - m) + m$
w	$12n - 1$	$12n - 1$	$12n - 1$
w'	$12n$	$12n$	$12n$
b_0	$10n + 2m$	$10n + 2m + 2(n - m)$	$12n$
b_j	$12n - 2$	$12n - 2$	$12n$
g_i	$12n$	$12n$	$12n$
d_i	$6n + 6(+1, i \in I)$	$6n + 7(+6n - 1, i \notin I)$	$12n + 6, i \notin I$
$\bar{d_i}$	$6n + 2(+6, i \in I)$	$6n + 8, i \in I$	$12n + 8, i \in I$

1. Runde: $\bar{d_i}$ mit $i \notin I$ scheiden aus.

2. Runde: d_i mit $i \in I$ scheiden aus.

3. Runde: w scheidet aus, weil nun jedes b_j aufgrund der exakten Überdeckung noch 2 zusätzliche Punkte bekommt. Somit wird c dann die Wahl gewinnen, weil ihm alle Stimmen von w und im Verlauf der restlichen Wahl die Punkte der anderen Kandidaten zukommen.

Aufgabe 2 (10 Punkte): CCWM für Maximin und 4 Kandidaten

In der Vorlesung haben Sie die Reduktion von PARTITION auf das Manipulationsproblem CCWM für das Wahlsystem Maximin mit 4 Kandidaten kennengelernt. Konstruieren Sie gemäß der Reduktion die Maximin-Wahl (C, V) aus der PARTITION-Instanz $(1, 14, 6, 2, 3)$. Bestimmen Sie die Gewichte der Manipulatoren in S' und berechnen Sie die Maximin-Scores in der Wahl (C, V). Erläutern Sie, weshalb hier keine erfolgreiche Manipulation möglich ist.

Lösungsvorschlag:
$(k_1, k_2, \ldots, k_5) = (1, 14, 6, 2, 3)$, also ist $K = 13$. $C = \{a, b, c, p\}$ und V besteht aus 4 Wählern mit Gesamtgewicht $23 \cdot 13 - 3 = 296$:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 13 - 1 = 90 &\quad a\,b\,c\,p \\ 7 \cdot 13 - 1 = 90 &\quad b\,c\,a\,p \\ 4 \cdot 13 - 1 = 51 &\quad c\,a\,b\,p \\ 5 \cdot 13 = 65 &\quad p\,c\,a\,b \end{aligned}$$

Punktwerte in (C, V):

$N(i,j)$	a	b	c	p	m-score
a	-	206	90	231	90
b	90	-	180	231	90
c	206	116	-	231	116
p	65	65	65	-	65

Die Manipulatoren in $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_5\}$ haben die folgenden Gewichte:

$$\begin{array}{ll} s_1 & \text{hat Gewicht } 2 \cdot 1 = 2 \\ s_2 & \text{hat Gewicht } 2 \cdot 14 = 28 \\ s_3 & \text{hat Gewicht } 2 \cdot 6 = 12 \\ s_4 & \text{hat Gewicht } 2 \cdot 2 = 4 \\ s_5 & \text{hat Gewicht } 2 \cdot 3 = 6 \end{array}$$

Die Manipulatoren können entweder mit $p\,a\,b\,c$ oder mit $p\,b\,c\,a$ abstimmen. Kandidat p kann maximal 117 Punkte haben.

- Angenommen, der Manipulator s_2' stimmt mit $p\,a\,b\,c$ ab. Dann hat a einen Score von 118 und p kann die Wahl $(C', V' \cup S')$ nicht gewinnen.
- Angenommen, der Manipulator s_2' stimmt mit $p\,b\,c\,a$ ab. Dann hat b einen Score von 118 und p kann die Wahl $(C', V' \cup S')$ nicht gewinnen.

Es kann also keine erfolgreiche Manipulation geben, wenn den Manipulatoren die vorliegenden Gewichte zugeteilt werden.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Wahlkontrolle

Es sei $\mathcal{E}$ ein Wahlsystem und $\mathcal{C}$ ein Wahlkontrolltyp. Das entsprechende Entscheidungsproblem (hier für die konstruktive Variante) sei wie folgt definiert.

	$\mathcal{E}$-C$\mathcal{C}$
Gegeben:	Eine $\mathcal{E}$-Wahl (C, V), ein ausgezeichneter Kandidat $c \in C$ (eventuell weitere Parameter).
Frage:	Ist es möglich, c durch Anwendung der Kontrolle $\mathcal{C}$ zum $\mathcal{E}$ Gewinner der resultierenden Wahl zu machen?

Angenommen, die Gewinnerbestimmung in $\mathcal{E}$ sei in deterministischer Polynomialzeit möglich und das Problem $\mathcal{E}$-C$\mathcal{C}$ sei NP-schwer. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ nicht immun gegenüber C$\mathcal{C}$ sein kann, es sei denn es gilt P = NP.

Lösungsvorschlag: Wir betrachten zunächst die Komplexität des Kontrollproblems $\mathcal{E}$-C$\mathcal{C}$, wenn das Wahlsystem $\mathcal{E}$ immun gegenüber diesem Kontrolltyp ist:
Es sei eine $\mathcal{E}$-C$\mathcal{C}$-Instanz gegeben. Es wird nun wie folgt entschieden, ob es sich um eine JA- oder NEIN-Instanz handelt.

Fall 1: Ist c bereits der Gewinner der vorliegenden Wahl, so handelt es sich um eine JA-Instanz. Der ausgezeichnete Kandidat kann ohne eine Änderung an der Wahl „zum Gewinner gemacht werden“.

Fall 2: Ist c kein Gewinner der vorliegenden Wahl, so handelt es sich um eine NEIN-Instanz, da die Immunität impliziert, dass c durch die Anwendung der Kontrolle

nicht zum Gewinner gemacht werden kann.

Das bedeutet, dass $\mathcal{E}$-C$\mathcal{C}$ im Fall von Immunität die gleiche Komplexität wie die Gewinnerbestimmung von $\mathcal{E}$ hat.

Zum Beweis: Es sei $\mathcal{E}$-C$\mathcal{C}$ NP-schwer und die Gewinnerbestimmung in $\mathcal{E}$ sei in deterministischer Polynomialzeit möglich.
Angenommen, $\mathcal{E}$ sei immun gegenüber der Kontrolle C$\mathcal{C}$. Dann wäre nach obiger Überlegung das Problem $\mathcal{E}$-C$\mathcal{C}$ in deterministischer Polynomialzeit lösbar, was aufgrund der Annahme, dass es ebenfalls NP-schwer sei, unmittelbar impliziert, dass P = NP gelten muss.

Aufgabe 4 (15 Punkte): Restricted Hitting Set

In der Vorlesung wurde eine eingeschränkte Version des Problems Hitting Set definiert:

Restricted Hitting Set (RHS)	
Gegeben:	Eine Menge $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, wobei $m \geq 1$, eine Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq B$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$ und eine positive ganze Zahl k. Zudem gilt $n(k+1)+1 \leq m-k$.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $B' \subseteq B$ mit $\|B'\| \leq k$, sodass B' mit jeder Teilmenge aus $\mathcal{S}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat?

(a) Zeigen Sie, dass das RHS Problem in NP liegt.

(b) Erläutern Sie, weshalb die Einschränkung $k+1 \leq m$ an eine HS-Instanz keine Einschränkung ist, die die NP-Schwere des Problems aufheben könnte.

(c) Zeigen Sie durch eine Reduktion HS $\leq_m^p$ RHS, dass das neue Problem RHS tatsächlich NP-schwer ist.

Lösungsvorschlag:

(a) (2) Ob eine gegebene Teilmenge B' nicht mehr als k Elemente und einen nicht leeren Durchnitt mit der Mengen aus $\mathcal{S}$ hat, kann in polynomialer Zeit gecheckt werden. Deswegen ist das Problem in NP.

(b) (3) Die Einschränkung entspricht $k < m$ und schließt lediglich triviale Spezialfälle des Problems aus.

Der Fall $k > m$ kann nicht eintreten, da B' eine Teilmenge von B sein soll und somit nicht mehr Elemente als B enthalten kann.

Angenommen, es gilt $k = m$, so muss $B' = B$ gelten und es ist somit trivialerweise bereits ein Hitting-Set der gesuchten Größe gegeben.

(c) (10) Es sei $(\hat{B}, \hat{\mathcal{S}}, k)$ eine HS-Instanz mit $\hat{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_{\hat{m}}\}$ und $\hat{\mathcal{S}} = \{\hat{S}_1, \hat{S}_2, \ldots, \hat{S}_n\}$.

Nach Aufgabenteil (a) können wir o.E. annehmen, dass $k + 1 \leq \hat{m}$ gilt.

Wir konstruieren aus $(\hat{B}, \hat{\mathcal{S}}, k)$ eine RHS-Instanz $(B, \mathcal{S}, k)$ mit

$$B = \hat{B} \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

wobei $A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,k+1}\}$ für $1 \leq i \leq n$ und $\forall_{i \neq j}\ A_i \cap A_j = \emptyset$, und

$$\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}, \quad \text{wobei } S_i = \hat{S}_i \cup A_i.$$

Zunächst ist zu zeigen, dass $(B, \mathcal{S}, k)$ die benötigte Einschränkung $n(k+1)+1 \leq m - k$ erfüllt. Es gilt

$$m = \|B\| = n(k+1) + \underbrace{\hat{m}}_{\geq k+1} \geq n(k+1) + k + 1$$
$$m - k \geq n(k+1) + 1.$$

Bleibt noch die folgende Äquivalenz zu zeigen: Es gibt ein Hitting-Set $\hat{B}'$ der Größe höchstens k für $\hat{\mathcal{S}}$ genau dann, wenn es ein Hitting-Set B' der Größe höchstens k für $\mathcal{S}$ gibt.

"$\Rightarrow$": Angenommen, $\hat{B}' \subseteq \hat{B}$ ist ein Hitting-Set für $\hat{\mathcal{S}}$ und es gilt $\|\hat{B}'\| \leq k$. Es gilt also $\hat{S}_i \cap \hat{B}' \neq \emptyset$ für alle i, $1 \leq i \leq n$. Aufgrund der Definition der S_i wird auch jedes S_i von $\hat{B}'$ getroffen. Zudem ist $\hat{B}' \subseteq B$, folglich also ein Hitting-Set der Größe höchstens k für $\mathcal{S}$.

"$\Leftarrow$": Angenommen, $B' \subseteq B$ ist ein Hitting-Set der Größe höchstens k für $\mathcal{S}$. Da nach Definition $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt, trifft jedes $a_{i,j}$, das womöglich in B' enthalten ist, nur das eine S_i. Daraus folgt nun aber, dass o.E. jedes dieser $a_{i,j} \in B'$ durch ein beliebiges Element aus $\hat{S}_i$ ersetzt werden kann, ohne dass sich an der Größe oder der Hitting-Set-Eigenschaft von B' etwas ändert. Damit gilt dann jedoch $B' \subseteq \hat{B}$ und B' ist ein Hitting-Set der Größe höchstens k für $\hat{\mathcal{S}}$.