Übung zur Vorlesung
Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 07. Dezember bis 14. Dezember, 12:00 mittags
Verantwortlich: Joanna Kaczmarek

Aufgabe 1 (10 Punkte): Non-monotonicity in STV

Das aus der Vorlesung bekannte Monotonie-Kriterium kann auch wie folgt definiert werden:

Ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ heißt monoton, wenn für jede $\mathcal{E}$-Wahl gilt: Ist Kandidat c kein Gewinner der Wahl, so kann er nicht zum Gewinner gemacht werden, indem die Position von c in einigen Stimmen verschlechtert wird.

Es lässt sich das folgende Entscheidungsproblem definieren:

Non-Monotonicity	
Gegeben:	Eine $\mathcal{E}$-Wahl (C, V) für ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ und ein ausgezeichneter Kandidat c, der nicht $\mathcal{E}$-Gewinner der Wahl (C, V) ist.
Frage:	Gibt es ein $V' \subseteq V$, sodass c zum Gewinner gemacht werden kann, wenn die Position von c in den Stimmen in V' verschlechtert wird?

Für das Wahlsystem STV sei nun der folgende Ansatz für eine Reduktion von X3C auf Non-Monotonicity gegeben:

Es sei $(B, \mathcal{S})$ eine X3C Instanz mit $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{3m}\}$ und einer Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $\|S_i\| = 3$ und $S_i \subseteq B$ für alle i, $1 \leq i \leq n$. Wir konstruieren daraus die STV-Wahl (C, V) mit der Kandidatenmenge

$$C = \{c\} \cup \{b_0, b_1, \ldots, b_{3m}\} \cup \{d_1, d_2, \ldots, d_n\} \cup \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_n\} \cup \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \cup \{w, w'\}$$

und der folgenden Wählerliste V:

(1)		$12n$	Wähler:	$c\, w ...$
(2)		$12n-1$	Wähler:	$w\, c ...$
(3)		$12n$	Wähler:	$w'\, w\, c ...$
(4)		$10n+2m$	Wähler:	$b_0\, w\, c ...$
(5)	Für jedes $j \in \{1, \dots, 3m\}$	$12n-2$	Wähler:	$b_j\, w\, c ...$
(6)	Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$	$12n$	Wähler:	$g_i\, w\, c ...$
(7)	Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$	$6n$	Wähler:	$d_i\, \bar{d}_i\, w\, c ...$
	und wenn $S_i = \{b_x, b_y, b_z\}$, dann	2	Wähler:	$d_i\, b_x\, w ...$
		2	Wähler:	$d_i\, b_y\, w ...$
		2	Wähler:	$d_i\, b_z\, w ...$
(8)	Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$	$6n$	Wähler:	$\bar{d}_i\, d_i\, w\, c ...$
		2	Wähler:	$\bar{d}_i\, b_0\, w\, c ...$
(9)	Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$	1	Wähler:	$c\, d_i ...$
		6	Wähler:	$c\, \bar{d}_i ...$

(a) Zeigen Sie, dass c die Wahl (C, V) nicht gewinnt.

(b) Es sei eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ gegeben. Wir vertauschen in den Stimmen der Wählergruppe (9) nun für alle $i \in I$ die Position von c und d_i bzw. $\bar{d}_i$ und es sei V' die so veränderte Wählerliste. Zeigen Sie, dass c die Wahl (C, V') gewinnt, wenn I die Indexmenge einer exakten Überdeckung für B ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte): CCWM für Maximin und 4 Kandidaten

In der Vorlesung haben Sie die Reduktion von Partition auf das Manipulationsproblem CCWM für das Wahlsystem Maximin mit 4 Kandidaten kennengelernt. Konstruieren Sie gemäß der Reduktion die Maximin-Wahl (C, V) aus der Partition-Instanz $(1, 14, 6, 2, 3)$. Bestimmen Sie die Gewichte der Manipulatoren in S' und berechnen Sie die Maximin-Scores in der Wahl (C, V). Erläutern Sie, weshalb hier keine erfolgreiche Manipulation möglich ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Wahlkontrolle

Es sei $\mathcal{E}$ ein Wahlsystem und $\mathcal{C}$ ein Wahlkontrolltyp. Das entsprechende Entscheidungsproblem (hier für die konstruktive Variante) sei wie folgt definiert.

$\mathcal{E}$-$\mathcal{CC}$	
Gegeben:	Eine $\mathcal{E}$-Wahl (C, V), ein ausgezeichneter Kandidat $c \in C$ (eventuell weitere Parameter).
Frage:	Ist es möglich, c durch Anwendung der Kontrolle $\mathcal{C}$ zum $\mathcal{E}$ Gewinner der resultierenden Wahl zu machen?

Angenommen, die Gewinnerbestimmung in $\mathcal{E}$ sei in deterministischer Polynomialzeit möglich und das Problem $\mathcal{E}$-C$\mathcal{C}$ sei NP-schwer. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ nicht immun gegenüber C$\mathcal{C}$ sein kann, es sei denn es gilt P = NP.

Aufgabe 4 (15 Punkte): Restricted Hitting Set

In der Vorlesung wurde eine eingeschränkte Version des Problems Hitting Set definiert:

Restricted Hitting Set (RHS)	
Gegeben:	Eine Menge $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, wobei $m \geq 1$, eine Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq B$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$ und eine positive ganze Zahl k. Zudem gilt $n(k+1)+1 \leq m-k$.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $B' \subseteq B$ mit $\|B'\| \leq k$, sodass B' mit jeder Teilmenge aus $\mathcal{S}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat?

(a) Zeigen Sie, dass das RHS Problem in NP liegt.

(b) Erläutern Sie, weshalb die Einschränkung $k+1 \leq m$ an eine HS-Instanz keine Einschränkung ist, die die NP-Schwere des Problems aufheben könnte.

(c) Zeigen Sie durch eine Reduktion HS $\leq_m^p$ RHS, dass das neue Problem RHS tatsächlich NP-schwer ist.