Lösungsvorschläge

Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 30. November bis 07. Dezember, 12:00 mittags
Verantwortlich: Christian Laußmann

Aufgabe 1 (8 Punkte): Zusammenhänge zwischen Kontrollproblemen I
Zeigen Sie die folgenden Aussage:

Wenn ein Wahlsystem anfällig für (susceptible to) CCPV-TE ist, dann ist es auch anfällig für CCDV.

Lösungsvorschlag: Sei (C, V) eine Wahl und $p \in V$. Angenommen in einem Wahlsystem $\mathcal{E}$ ist es für manche Instanzen möglich, die Wähler in zwei disjunkte Gruppen V_1, V_2 aufzuteilen, sodass p der eindeutigen Gewinner der $\mathcal{E}$ -Wahl zwischen den Gewinnern von (C, V_1) und (C, V_2) ist, aber nicht eindeutiger Gewinner der $\mathcal{E}$ -Wahl (C, V) . Mit anderen Worten, $\mathcal{E}$ ist anfällig für CCPV-TE.

Damit p in der zweiten Runde der Wahl noch dabei ist, muss p in (C, V_1) oder (C, V_2) eindeutiger Gewinner sein. O.B.d.A nehmen wir an, p gewinnt in (C, V_1) . Dann können wir durch das Entfernen der Wähler V_2 auch p zum Gewinner in $(C, V \setminus V_2)$ machen. Mit anderen Worten, $\mathcal{E}$ ist anfällig für CCDV.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Zusammenhänge zwischen Kontrollproblemen II
Zeigen Sie die folgenden Aussage:

Wenn ein Wahlsystem anfällig für CCDV ist, dann ist es auch für DCAV anfällig.

Lösungsvorschlag: Angenommen, ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ ist anfällig für CCDV. Sei $I = (C, V, p, k)$ eine JA-Instanz für $\mathcal{E}$ -CCDV, für die gilt, dass p nicht alleiniger Gewinner in der $\mathcal{E}$ -Wahl (C, V) ist. ^a Das heißt, es gibt eine Teilmenge $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$ sodass p alleiniger Gewinner in der $\mathcal{E}$ -Wahl $(C, V \setminus X)$ ist. Sei nun $I' = (C, V \setminus X, X, p, k)$ eine Instanz für $\mathcal{E}$ -DCAV. Von oben wissen wir, dass $|X| \leq k$ und dass das Hinzufügen der Wähler aus X dazu führt, dass p in der $\mathcal{E}$ -Wahl nicht mehr alleiniger Sieger ist. Also ist $\mathcal{E}$ auch anfällig für destruktive

Kontrolle durch Hinzufügen von Wählern.

^aDas heißt, es handelt sich nicht um eine triviale Instanz, in der p schon ohne Manipulation gewinnt.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Voiced-Eigenschaft

- (a) Zeigen Sie, dass Plurality die Voiced-Eigenschaft erfüllt.
- (b) Zeigen Sie, dass alle Wahlsysteme mit der Voiced-Eigenschaft anfällig für konstruktive Kontrolle durch Entfernen von Kandidaten (CCDC) sind.

Lösungsvorschlag:

- (a) In einer Wahl mit nur einem Kandidaten stimmen alle Wähler in Plurality für diesen Kandidaten. Also hat er den höchsten Score und ist somit Gewinner.
- (b) (Aus Hemaspaandra, Hemaspaandra, und Rothe (2007), Theorem 4.3)
Sei (C, V) mit $C = \{a, b\}$ eine Wahl mit zwei Kandidaten und beliebig vielen Wählern mit beliebigen Präferenzen über C . Es können nicht beide Kandidaten gleichzeitig alleinige Gewinner sein (sie können zwar beide gewinnen, aber dann sind die nicht alleinige Gewinner). Sei also o.B.d.A Kandidat a nicht der alleinige Gewinner der Wahl. Durch das Entfernen von Kandidat b erhalten wir die Wahl $(\{a\}, V)$. Ein Wahlsystem mit der Voiced-Eigenschaft muss nun a zum alleinigen Gewinner von $(\{a\}, V)$ machen. Also ist solch ein Wahlsystem anfällig für konstruktive Kontrolle durch Entfernen von Kandidaten (CCDC).

Punkte: 2 Punkte für (a) und 8 Punkte für (b).

Aufgabe 4 (14 Punkte): Condorcet und Scoring-Protokolle

Betrachten Sie eine Wahl mit drei Kandidaten und beliebig vielen Wählern. Gegeben sei ein beliebiger Scoring-Vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $\alpha_1 \geq \alpha_2 > \alpha_3$.

- (a) Geben Sie mindestens zwei Wahlregeln aus der Vorlesung an, die sich durch solch einen Scoring-Vektor darstellen lassen.
- (b) Beweisen Sie, dass alle Wahlregeln, die sich durch solch einen Scoring-Vektor darstellen lassen, nicht das Condorcet-Kriterium erfüllen können.
- (c) Erfüllen alle Scoring-Protokolle für zwei Kandidaten das Condorcet-Kriterium? Begründen Sie.

Lösungsvorschlag:

(a) Borda und Veto lassen sich durch solche Scoring-Vektoren darstellen:

- Borda: $(2, 1, 0)$
- Veto: $(1, 1, 0)$

(b) (Aus "Paradoxes of Voting", Fishburn 1974)

Betrachte folgendes Profil mit 7 Stimmen über den Kandidaten $C = \{a, b, c\}$:

$$3\times : a > b > c$$

$$2\times : b > c > a$$

$$1\times : b > a > c$$

$$1\times : c > a > b$$

Es gilt $score(a) = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$, $score(b) = 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$ und $score(c) = 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3$.

Kandidat a ist Condorcet-Gewinner. Angenommen a wäre ein Gewinner nach dem Scoring-Protokoll, d.h., a hat den höchsten Score. Dann müsste gelten

$$\begin{aligned} score(a) &\geq score(b) \\ \iff 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &\geq 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ \iff 2\alpha_3 &\geq \alpha_2 + \alpha_3 \\ \iff \alpha_3 &\geq \alpha_2 \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung $\alpha_2 > \alpha_3$ ist.

(c) Für zwei Kandidaten müssen wir bei einem Scoring-Protokoll mit Vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ nur zwei Fälle unterscheiden:

- Falls $\alpha_1 = \alpha_2$, gewinnen beide Kandidaten immer. Also ist der Condorcet-Gewinner auch unter den Gewinnern.
- Falls $\alpha_1 > \alpha_2$, gewinnt immer der Condorcet-Gewinner, sofern er existiert, denn dieser steht öfter an Position 1 als der andere Kandidat.

Also erfüllen alle Scoring-Protokolle für zwei Kandidaten das Condorcet-Kriterium.

Punkte: 1 Punkt für (a), 10 Punkte für (b) und 3 Punkte für (c).