Lösungsvorschläge

Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 23. November bis 30. November, 12:00 mittags
Verantwortlich: Christian Laußmann

Aufgabe 1 (4 Punkte): Plurality with Runoff

Zeigen Sie, dass Plurality-with-Runoff-CCWM für drei Kandidaten NP-vollständig ist.

Lösungsvorschlag: Für drei Kandidaten entspricht Plurality with Runoff genau STV. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass STV-CCWM für drei Kandidaten NP-vollständig ist.

Aufgabe 2 (16 Punkte): Maximin-CCWM

Gegeben sei folgende Instanz von PARTITION: $I = (k_1, k_2, ..., k_7) = (5, 2, 4, 5, 8, 9, 9)$.

(a) Ist I eine JA-Instanz für PARTITION? Begründen Sie.

(b) Beweisen Sie, dass Maximin-CCWM in NP ist.

(c) Konstruieren Sie nun wie im Beweis aus der Vorlesung eine Instanz für Maximin-CCWM aus I. Geben Sie dabei die Gewichte der Wähler explizit an.

(d) Geben Sie Stimmen für die manipulierenden Wähler an, sodass der ausgezeichnete Kandidat in Ihrer konstruierten Instanz aus (c) gewinnt. Geben Sie dabei auch die Scores aller Kandidaten an.

(e) Angenommen, man könnte eine ähnliche Reduktion auch für drei Kandidaten angeben, d.h., PARTITION $\leq_m^p$ Maximin-CCWM mit drei Kandidaten. Was ließe sich dann über die Komplexität von SOS sagen?

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt $5 + 2 + 5 + 9 = 4 + 8 + 9 = 21 = K$, also ist I eine JA-Instanz.

(b) Wir zeigen zunächst, dass man in Polynomialzeit den Gewinner einer Maximin-Wahl bestimmen kann: Der Score eines jeden Kandidaten c ist $MScore(c) =$

$\min_{d \neq c} N(c,d)$. Um $N(c,d)$ zu berechnen muss man für jede Wählerstimme schauen, ob c oder d bevorzugt wird und entsprechend die Gewichte aufsummieren. Wenn die Präferenzen als Liste gegeben sind, geht das in $\mathcal{O}(n \cdot m)$ für n Wähler und m Kandidaten, also in Polynomialzeit. Wir vergleichen c mit jedem anderen Kandidaten, also suchen wir das minimum aus $m-1$ Berechnungen von $N(c,d)$ und erhalten so $MScore(c)$. Das wiederholen wir für alle m Kandidaten und suchen den Kandidaten mit größtem Score. Insgesamt ist die Gewinnerbestimmung also in Polynomialzeit möglich.

Nun können wir einen Algorithmus für eine NP-Maschine angeben, der Maximin-CCWM entscheidet: Man rät nichtdeterministisch die Stimmen der manipulierenden Wähler und überprüft dann in Polynomialzeit ob die Manipulation erfolgreich ist, d.h. ob der gewünschte Kandidat gewinnt.

(c) Wir konstruieren die Instanz (C, V, S, p) mit $C = \{a, b, c, p\}$ und

V :

Gewicht	Stimme
$7 \cdot 21 - 1 = 146$	$a > b > c > p$
$7 \cdot 21 - 1 = 146$	$b > c > a > p$
$4 \cdot 21 - 1 = 83$	$c > a > b > p$
$5 \cdot 21 = 105$	$p > c > a > b$

und $S = (2k_1, 2k_2, ..., 2k_n) = (10, 4, 8, 10, 16, 18, 18)$.

(d) Aus (a) abgeleitet ergeben sich die Stimmen:

Gewicht	Stimme
10	$p > a > b > c$
4	$p > a > b > c$
10	$p > a > b > c$
18	$p > a > b > c$
8	$p > b > c > a$
16	$p > b > c > a$
18	$p > b > c > a$

Kandidat p verliert nun im paarweisen Vergleich gegen jeden anderen Kandidaten mit 189 zu 375, hat also $MScore(p) = 189$. Kandidat a hat seinen schwächsten Vergleich gegen c mit $188 : 376$, b gegen a mit $188 : 376$ und c gegen b mit $188 : 376$. Sie haben also alle einen Maximin-Score von 188. Damit gewinnt p.

(e) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Maximin-CCWM für 3 Kandidaten in P liegt. Von Partition wissen wir, dass es NP-vollständig ist. Wenn nun Partition $\leq_m^p$ Maximin-CCWM mit 3 Kandidaten gezeigt würde, dann wäre Partition in P und es gilt P = NP. Damit wäre auch das NP-vollständige Problem SOS in P.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Maximin

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen.

(a) Maximin ist konsistent.

(b) Maximin ist homogen.

Lösungsvorschlag:

(a) Betrachten wir die Wahl (C, V) aus Aufgabe 2.4 mit mit $C = \{a, b, c\}$ und den Stimmen V in zwei Partitionen:

	Gruppe	Anzahl	Präferenz
V_3'	1	7	$a\,b\,c$
	2	5	$b\,c\,a$
	3	4	$c\,a\,b$
V_3''	4	5	$a\,c\,b$
	5	4	$c\,b\,a$

Wir berechnen die MScores in den Wahlen (C, V), (C, V') und (C, V''):

(C, V)

	a	b	c	MScore
a	-	16:9	12:13	12
b	9:16	-	12:13	9
c	13:12	13:12	-	13

(C, V')

	a	b	c	MScore
a	-	11:5	7:9	7
b	5:11	-	12:4	5
c	9:7	4:12	-	4

(C, V'')

	a	b	c	MScore
a	-	5:4	5:4	5
b	4:5	-	0:9	0
c	4:5	9:0	-	4

Kandidat a gewinnt beide Teilwahlen, jedoch gewinnt c die Gesamtwahl. Somit erfüllt Maximin nicht das Konsistenzkriterium.

(b) Maximin ist homogen, da eine Vervielfältigung der Stimmen um Faktor q einfach in einer Vervielfachung des Maxmin-Scores um Faktor q bei jedem Kandidaten resultiert. Folglich bleiben Kandidaten mit maximalem Maximin-Score weiterhin Gewinner.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Gerrymandering

Vor rund 2000 Jahren gab es in Judäa zwei konkurrierende Parteien: Die *Volksfront von Judäa (VVJ)* und die *Judäische Volksfront (JV)*. Beide konkurrieren um die Vorherrschaft im judäischen Senat, der aus k Abgeordneten besteht, die wie folgt gewählt werden:

Die n Wähler haben je eine Plurality-Stimme und werden in k gleich große Gruppen (Bezirke) disjunkt aufgeteilt. Vereinfachend nehmen wir an, dass n ein Vielfaches von k ist. In jedem Bezirk tritt ein Kandidat von VVJ und einer von JV an. Wer eine strikte Mehrheit der Stimmen im Bezirk bekommt, kommt in den Senat. Bei Gleichstand kommt ein zufälliger Kandidat aus dem Bezirk in den Senat.

(a) Es gibt $k = 5$ Plätze im Senat. Unter den $n = 85$ Wählern sind 28 Anhänger von VVJ und 57 Anhänger von JV (und wählen die entsprechenden Kandidaten). Ist es möglich, die Wähler so aufzuteilen, dass VVJ im Senat die Mehrheit der Abgeordneten stellt? Begründen Sie.

(b) Zeigen Sie folgende Aussage bezogen auf das eben vorgestellte Wahlsystem.

Für zwei Parteien, beliebig viele Wähler und beliebiges k ist es für keine Partei möglich, mit weniger als $1/4$ der Stimmen wenigstens $\lceil k/2 \rceil$ Abgeordnete in den Senat zu schicken.

(c) Diskutieren Sie Vor- und Nachteile dieses Wahlsystems.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir teilen die Wähler in 5 Bezirke mit je $85/5 = 17$ Wählern:

- **Bezirk 1:** 9 Wähler für VVJ, 8 Wähler für JV
- **Bezirk 2:** 9 Wähler für VVJ, 8 Wähler für JV
- **Bezirk 3:** 10 Wähler für VVJ, 7 Wähler für JV
- **Bezirk 4:** 0 Wähler für VVJ, 17 Wähler für JV
- **Bezirk 5:** 0 Wähler für VVJ, 17 Wähler für JV

So gewinnen in Bezirken 1, 2 und 3 die VVJ Kandidaten und in Bezirken 4 und 5 die JV Kandidaten.

(b) Jeder Bezirk hat genau n/k Wähler. Um sicher in einem Bezirk zu gewinnen braucht man eine strikte Mehrheit der Stimmen im Bezirk, also $\lfloor n/2k \rfloor + 1$. Mit glücklichem Tie-Breaking kann man aber auch mit einfacher Mehrheit gewinnen, also mit $\lceil n/2k \rceil$ Stimmen.

Selbst unter Annahme günstigen Tie-Breakings brauchen wir also mindestens $\lceil k/2 \rceil \cdot \lceil n/2k \rceil \geq k/2 \cdot n/2k = n/4$ Stimmen, um mindestens die Hälfte der Abgeordneten im Senat zu stellen.

(c) In dem Wahlsystem kann es vorkommen, dass eine Minderheit der Wähler eine Mehrheit der Abgeordneten im Senat stellt. Dadurch können politische Entscheidungen gegen den Willen einer deutlichen Mehrheit der Wähler getroffen werden. Ein Vorteil des Wahlsystems ist allerdings, dass jeder Bezirk gleich stark vertreten ist. So kann beispielsweise sichergestellt werden, dass jeder Bezirk mehr oder weniger proportional von Entscheidungen im Senat profitiert.