

Übung zur Vorlesung
**Präferenzaggregation durch Wählen:
Algorithmik und Komplexität**

Bearbeitungszeit: 23. November bis 30. November, 12:00 mittags
Verantwortlich: Christian Laufmann

Aufgabe 1 (4 Punkte): Plurality with Runoff

Zeigen Sie, dass Plurality-with-Runoff-CCWM für drei Kandidaten NP-vollständig ist.

Aufgabe 2 (16 Punkte): Maximin-CCWM

Gegeben sei folgende Instanz von PARTITION: $I = (k_1, k_2, \dots, k_7) = (5, 2, 4, 5, 8, 9, 9)$.

- Ist I eine JA-Instanz für PARTITION? Begründen Sie.
- Beweisen Sie, dass Maximin-CCWM in NP ist.
- Konstruieren Sie nun wie im Beweis aus der Vorlesung eine Instanz für Maximin-CCWM aus I . Geben Sie dabei die Gewichte der Wähler explizit an.
- Geben Sie Stimmen für die manipulierenden Wähler an, sodass der ausgezeichnete Kandidat in Ihrer konstruierten Instanz aus (c) gewinnt. Geben Sie dabei auch die Scores aller Kandidaten an.
- Angenommen, man könnte eine ähnliche Reduktion auch für drei Kandidaten angeben, d.h., $\text{PARTITION} \leq_m^p$ Maximin-CCWM mit drei Kandidaten. Was ließe sich dann über die Komplexität von SOS sagen?

Aufgabe 3 (10 Punkte): Maximin

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen.

- Maximin ist konsistent.
- Maximin ist homogen.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Gerrymandering

Vor rund 2000 Jahren gab es in Judäa zwei konkurrierende Parteien: Die *Volksfront von Judäa (VVJ)* und die *Judäische Volksfront (JV)*. Beide konkurrieren um die Vorherrschaft im judäischen Senat, der aus k Abgeordneten besteht, die wie folgt gewählt werden:

Die n Wähler haben je eine Plurality-Stimme und werden in k gleich große Gruppen (Bezirke) disjunkt aufgeteilt. Vereinfachend nehmen wir an, dass n ein Vielfaches von k ist. In jedem Bezirk tritt ein Kandidat von VVJ und einer von JV an. Wer eine strikte Mehrheit der Stimmen im Bezirk bekommt, kommt in den Senat. Bei Gleichstand kommt ein zufälliger Kandidat aus dem Bezirk in den Senat.

- (a) Es gibt $k = 5$ Plätze im Senat. Unter den $n = 85$ Wählern sind 28 Anhänger von VVJ und 57 Anhänger von JV (und wählen die entsprechenden Kandidaten). Ist es möglich, die Wähler so aufzuteilen, dass VVJ im Senat die Mehrheit der Abgeordneten stellt? Begründen Sie.
- (b) Zeigen Sie folgende Aussage bezogen auf das eben vorgestellte Wahlsystem.
Für zwei Parteien, beliebig viele Wähler und beliebiges k ist es für keine Partei möglich, mit weniger als $\frac{1}{4}$ der Stimmen wenigstens $\lceil k/2 \rceil$ Abgeordnete in den Senat zu schicken.
- (c) Diskutieren Sie Vor- und Nachteile dieses Wahlsystems.