Lösungsvorschläge

Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 16. November bis 23. November, 12:00 mittags
Verantwortlich: Christian Laußmann

Aufgabe 1 (14 Punkte): Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Wir sagen eine Wahlregel f ist unabhängig von irrelevanten Alternativen, wenn für alle Paare von Wahlen $E = (C, V), E' = (C, V')$ und alle $a, b \in C$ gilt, wenn $a >_v b \iff a >_{v'} b$ für alle $v \in V, v' \in V'$ und $a \in f(E)$ und $b \notin f(E)$, dann gilt $b \notin f(E')$. Dabei ist v' die veränderte Präferenz von v.

(a) Erklären Sie in eigenen Worten, was Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen bedeutet.

(b) Betrachten Sie die Kandidatenmenge $C = \{a, b, c, d, e\}$ und die Präferenzen

$$\begin{aligned} V = (&b >_1 a >_1 e >_1 c >_1 d, \\ &b >_2 d >_2 a >_2 c >_2 e, \\ &c >_3 e >_3 a >_3 b >_3 d). \end{aligned}$$

Geben Sie Präferenzen $V' \neq V$ an, sodass $c >_v d \iff c >_{v'} d$.

(c) Zeigen Sie anhand eines konkreten Beispiels, dass Plurality nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen ist.

(d) Begründen Sie, warum Dodgson nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen sein kann. *Hinweis: Benutzen Sie ein Theorem aus der Vorlesung.*

Lösungsvorschlag:

(a) Wenn in einer Wahl Kandidat a gewinnt und Kandidat b nicht, dann ist a offenbar besser als b. Wenn nun die Wähler ihre Stimmen ändern, aber ohne dass dabei ein Wähler der vorher a bevorzugt hat jetzt b bevorzugt und andersherum, dann sollte b dadurch nicht besser werden können als a.

(b)

$$V' = (b >_{1'} c >_{1'} d >_{1'} e >_{1'} a,$$
$$b >_{2'} d >_{2'} c >_{2'} a >_{2'} e,$$
$$c >_{3'} d >_{3'} e >_{3'} b >_{3'} a).$$

(c) Sei $C = \{a, b, c\}$ und

$$V = (a >_1 b >_1 c,$$
$$c >_2 b >_2 a),$$

$$V' = (a >_{1'} b >_{1'} c,$$
$$b >_{2'} c >_{2'} a).$$

Es gilt $a >_v b \iff a >_{v'} b$ für alle $v \in V, v' \in V'$ und a ist Plurality-Gewinner für die Stimmen in V und b ist kein Plurality-Gewinner für die Stimmen in V. Aber b ist Plurality-Gewinner für die Stimmen in V'. Also ist Plurality nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen.

(d) Dodgson ist offensichtlich keine Diktatur. In Aufgabe 5.2 haben wir zudem gezeigt, dass Dodgson Pareto-konsistent ist. Nach dem Theorem von Arrow kann kein Wahlsystem gleichzeitig auch noch unabhängig von irrelevanten Alternativen sein. Also ist Dodgson nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen.

Aufgabe 2 (14 Punkte): Condorcet-Gewinner und -Verlierer

(a) Zeigen Sie, dass Plurality- und Condorcet-Gewinner unvergleichbar sind, d.h.,

 (i) c ist Condorcet-Gewinner $\not\Longrightarrow$ c ist Plurality-Gewinner und

 (ii) c ist Plurality-Gewinner $\not\Longrightarrow$ c ist Condorcet-Gewinner.

(b) Zeigen Sie, dass ein Borda-Gewinner nie ein Condorcet-Verlierer ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Betrachte folgende Präferenzen:

$$v_1 : b > a > c > d$$
$$v_2 : c > a > b > d$$
$$v_3 : d > a > b > c$$

Offenbar kann a kein Plurality-Gewinner sein, aber a ist Condorcet-Gewinner.

Also gilt Condorcet-Gewinner $\not\Rightarrow$ Plurality-Gewinner.

Umgekehrt gilt auch Plurality-Gewinner $\not\Rightarrow$ Condorcet-Gewinner. An obigem Präferenzprofil kann man das sehen, denn b, c, d sind Plurality-Gewinner aber nicht Condorcet-Gewinner. Alternativ kann man auch argumentieren, dass ein Plurality-Gewinner immer existiert, ein Condorcet-Gewinner aber nicht.

(b) Sei C mit $|C| = m$ die Menge der Kandidaten und V mit $|V| = n$ die Menge der Wähler. Nach Aufgabe 1.4 ist der Borda-Score eines Kandidaten c

$$\text{Score}^{\text{Borda}}(c) = \sum_{v \in V} m - \text{pos}_v(c) = \sum_{v \in V} |\{x \in C \setminus \{c\} \mid c >_v x\}|,$$

wobei $\text{pos}_v(c)$ die Position von c in der Präferenz v bezeichnet. Wir können das weiter umformen zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{v \in V} |\{x \in C \setminus \{c\} \mid c >_v x\}| \\
=&\sum_{v \in V} \left[\sum_{x \in C \setminus \{c\}} f(v, c, x) \right] \\
=&\sum_{x \in C \setminus \{c\}} \left[\sum_{v \in V} f(v, c, x) \right] \\
=&\sum_{x \in C \setminus \{c\}} |\{v \in V \mid c >_v x\}|, \qquad (1)
\end{aligned}$$

wobei $f(v, c, x) := 1$ wenn $c >_v x$ und $f(v, c, x) := 0$ sonst.

Angenommen es existiert ein Condorcet-Verlierer $l \in C$. Dann gilt für alle $x \in C \setminus \{l\}$, dass eine echte Mehrheit der Wähler x vor l bevorzugt, d.h., für alle $x \in C \setminus \{l\}$ gilt

$$|\{v \in V \mid l >_v x\}| \leq (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1). \qquad (2)$$

Nach (1) und (2) kann der Borda-Score von l maximal $(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) \cdot (m - 1)$ sein.

Insgesamt gibt es in Borda $n \cdot (m-1+m-2+...+1) = \frac{n \cdot m \cdot (m-1)}{2}$ Punkte zu verteilen. Im Durchschnitt also pro Kandidat $\frac{n \cdot (m-1)}{2} > (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) \cdot (m-1)$. Demnach muss es mindestens einen Kandidaten geben, der einen höheren Borda-Score hat als l. Also kann der Condorcet-Verlierer nie ein Borda-Gewinner sein.

Aufgabe 3 (12 Punkte): CCWM Komplexität bei Scoring Protokollen

Gegeben sei die folgende Instanz für Partition: $I = (k_1, k_2, ..., k_8) = (3, 5, 2, 9, 8, 12, 4, 3)$.

(a) Ist I eine JA-Instanz für PARTITION? Begründen Sie.

(b) Im Beweis aus der Vorlesung zur NP-Vollständigkeit von Scoring-Protocols$\setminus\{$Trivial, Plurality$\}$-CCWM werden Annahmen über den Scoring-Vektor gemacht. Geben Sie einen Scoring-Vektor an, der diese Annahmen erfüllt, sodass nach diesem Scoring-Vektor genau die Borda-Gewinner gewinnen. Begründen Sie.

(c) Konstruieren Sie nun wie im Beweis aus der Vorlesung eine Instanz für Borda-CCWM aus I. Geben Sie dabei die Gewichte der Wähler explizit an.

(d) Geben Sie Stimmen für die manipulierenden Wähler an, sodass der ausgezeichnete Kandidat in Ihrer konstruierten Instanz aus (c) gewinnt. Geben Sie dabei auch die Scores aller Kandidaten an.

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt $2 + 9 + 12 = 23 = K = 3 + 5 + 8 + 4 + 3$. Also lässt sich die Folge in zwei gleiche Summen aufteilen. Damit ist I eine JA-Instanz.

(b) Der Vektor muss folgende Annahmen erfüllen:

- $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$
- $\alpha_2 \geq 2$
- $\alpha_3 = 0$

Der normale Borda-Vektor $(2, 1, 0)$ erfüllt alle Annahmen bis auf $\alpha_2 \geq 2$. Nach Aufgabe 4.1 dürfen wir alle α_i mit einem Faktor q multiplizieren und die Gewinner bleiben die selben. Wir wählen $q = 2$ und erhalten als Vektor $(4, 2, 0)$. Dieser Vektor erfüllt alle Annahmen.

(c) Wir konstruieren die Instanz (C, V, S, p) für Borda-CCWM wie folgt:

$C = \{a, b, p\}$ und p ist der ausgezeichnete Kandidat. Die nicht-manipulierenden Wähler haben jeweils das Gewicht $(2\alpha_1 - \alpha_2)K - 1 = (2 \cdot 4 - 2) \cdot 23 - 1 = 137$ und Stimmen

	Gewicht	Präferenz
V :	137	$a > b > p$
	137	$b > a > p$

Die manipulierenden Wähler haben die Gewichte $(\alpha_1 + \alpha_2)k_i$ für $i \in \{1, ..., 8\}$, also $S = (18, 30, 12, 54, 48, 72, 24, 18)$.

(d) Wir wissen aus (a), dass $2+9+12 = 23 = 3+5+8+4+3$. Also wählen wir die entsprechend gewichteten Wähler aus und geben ihnen die folgenden Stimmen:

Gewicht	Präferenz
12	$p > a > b$
54	$p > a > b$
72	$p > a > b$
18	$p > b > a$
30	$p > b > a$
48	$p > b > a$
24	$p > b > a$
18	$p > b > a$

Nach der Manipulation ergeben sich $score(a) = 137 \cdot \alpha_1 + 137 \cdot \alpha_2 + 138 \cdot \alpha_2 = 1098$, $score(b) = 137 \cdot \alpha_2 + 137 \cdot \alpha_1 + 138 \cdot \alpha_2 = 1098$ und $score(p) = 276 \cdot \alpha_1 = 1104$. Also gewinnt p.