Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Wintersemester 2021/22
Übungsblatt 6

Übung zur Vorlesung

Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 16. November bis 23. November, 12:00 mittags
Verantwortlich: Christian Laußmann

Aufgabe 1 (14 Punkte): Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Wir sagen eine Wahlregel f ist unabhängig von irrelevanten Alternativen, wenn für alle Paare von Wahlen $E = (C, V), E' = (C, V')$ und alle $a, b \in C$ gilt, wenn $a >_v b \iff a >_{v'} b$ für alle $v \in V, v' \in V'$ und $a \in f(E)$ und $b \notin f(E)$, dann gilt $b \notin f(E')$. Dabei ist v' die veränderte Präferenz von v.

(a) Erklären Sie in eigenen Worten, was Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen bedeutet.

(b) Betrachten Sie die Kandidatenmenge $C = \{a, b, c, d, e\}$ und die Präferenzen

$$V = (b >_1 a >_1 e >_1 c >_1 d,$$
$$b >_2 d >_2 a >_2 c >_2 e,$$
$$c >_3 e >_3 a >_3 b >_3 d).$$

Geben Sie Präferenzen $V' \neq V$ an, sodass $c >_v d \iff c >_{v'} d$.

(c) Zeigen Sie anhand eines konkreten Beispiels, dass Plurality nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen ist.

(d) Begründen Sie, warum Dodgson nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen sein kann. *Hinweis: Benutzen Sie ein Theorem aus der Vorlesung.*

Aufgabe 2 (14 Punkte): Condorcet-Gewinner und -Verlierer

(a) Zeigen Sie, dass Plurality- und Condorcet-Gewinner unvergleichbar sind, d.h.,

(i) c ist Condorcet-Gewinner $\not\Rightarrow$ c ist Plurality-Gewinner und

(ii) c ist Plurality-Gewinner $\not\Rightarrow$ c ist Condorcet-Gewinner.

(b) Zeigen Sie, dass ein Borda-Gewinner nie ein Condorcet-Verlierer ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte): CCWM Komplexität bei Scoring Protokollen

Gegeben sei die folgende Instanz für PARTITION: $I = (k_1, k_2, ..., k_8) = (3, 5, 2, 9, 8, 12, 4, 3)$.

(a) Ist I eine JA-Instanz für PARTITION? Begründen Sie.

(b) Im Beweis aus der Vorlesung zur NP-Vollständigkeit von Scoring-Protocols\{Trivial, Plurality}-CCWM werden Annahmen über den Scoring-Vektor gemacht. Geben Sie einen Scoring-Vektor an, der diese Annahmen erfüllt, sodass nach diesem Scoring-Vektor genau die Borda-Gewinner gewinnen. Begründen Sie.

(c) Konstruieren Sie nun wie im Beweis aus der Vorlesung eine Instanz für Borda-CCWM aus I. Geben Sie dabei die Gewichte der Wähler explizit an.

(d) Geben Sie Stimmen für die manipulierenden Wähler an, sodass der ausgezeichnete Kandidat in Ihrer konstruierten Instanz aus (c) gewinnt. Geben Sie dabei auch die Scores aller Kandidaten an.