Übung zur Vorlesung

Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 09. November bis 16. November, 12:00 mittags
Verantwortlich: Christian Laußmann

Aufgabe 1 (10 Punkte): Komplexität Gewinnerbestimmung

Nehmen Sie an, dass die folgenden beiden Funktionen in konstanter Zeit (also $\mathcal{O}(1)$) berechnet werden können:

- $\text{pos}_v(x)$ gibt die Position von Kandidat x in der Präferenz v zurück.
- $\text{prefers}_v(x, y)$ gibt "True" zurück, wenn $x >_v y$ und "False" andernfalls.

(a) Geben Sie für *Copeland* und *Scoring-Protokolle* mit beliebigem Scoring-Vektor α je einen möglichst effizienten Algorithmus (Pseudocode) an, der als Eingabe die Menge der Präferenzen V und die Menge der Kandidaten C bekommt und unter Verwendung der Funktionen pos und prefers alle Gewinner der Wahl bestimmt.

(b) Geben Sie die (Worst-Case-) Laufzeit Ihrer Algorithmen in Abhängigkeit von $|V| = n$ und $|C| = m$ in Landau-Notation an. Begründen Sie.

(c) Was können Sie über die Komplexität der Manipulationsprobleme für Copeland und Scoring-Protokolle folgern?

Aufgabe 2 (10 Punkte): Pareto Kriterium

Wir sagen Kandidat a *Pareto-dominiert* Kandidat b, wenn alle Wähler a mindestens so gut finden wie b und mindestens ein Wähler a echt besser findet als b. Wir behandeln im folgenden nur Präferenzen ohne Gleichstände. Für Präferenzen ohne Gleichstände ist Pareto-Dominanz äquivalent dazu, dass alle Wähler a vor b bevorzugen. Ein Wahlsystem erfüllt das *Pareto-Kriterium*, wenn ein Gewinner nie Pareto-dominiert wird.

(a) Zeigen Sie, dass Dodgson das Pareto-Kriterium erfüllt.

(b) Geben Sie ein Wahlsystem an, das das Pareto-Kriterium verletzt. Demonstrieren Sie dies an einem Beispiel.

Aufgabe 3 (12 Punkte): Maximin Wahlsystem

Aus der Vorlesung kennen Sie das Maximin Wahlsystem.

(a) Beweisen Sie, dass das Maximin Wahlsystem das Condorcet Kriterium erfüllt.

(b) Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass im Maximin Wahlsystem auch ein Condorcet-Verlierer alleiniger Gewinner werden kann.

Aufgabe 4 (8 Punkte): Maximin Manipulation

Gegeben sei folgende Instanz für MAXIMIN-CCWM:

$$\begin{aligned} C &= \{a, b, c\} \\ V &= (a >_1 b >_1 c \\ &\quad\; b >_2 a >_2 c \\ &\quad\; c >_3 b >_3 a) \end{aligned}$$

Die manipulierenden Wähler sind $\{4, 5, 6\}$ und die Gewichte sind $w(1) = 3, w(2) = 2, w(3) = 7, w(4) = 1, w(5) = 1, w(6) = 1$. Die Manipulatoren wollen Kandidat a zum *alleinigen* Sieger der Wahl machen.

(a) Geben Sie die Maximin-Scores aller Kandidaten vor der Manipulation an.

(b) Ist die Manipulation möglich? Falls ja, geben Sie Stimmen für Wähler $4, 5$ und 6 an, welche die Manipulation erfolgreich machen. Geben Sie außerdem die Maximin-Scores nach der Manipulation an. Falls nein, beweisen Sie, dass eine Manipulation nicht möglich ist.