Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Wintersemester 2021/22
Übungsblatt 4

Lösungsvorschläge
Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 02. November bis 09. November, 12:00 mittags
Verantwortlich: Marc Neveling

Aufgabe 1 (12 Punkte): Scoring-Protokolle
Gegeben sei ein Scoring-Protokoll mit Scoring-Vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ für eine Wahl mit m Kandidaten. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) Für alle natürlichen Zahlen k ist $\alpha_{+k} := \alpha + k := (\alpha_1 + k, \alpha_2 + k, \ldots, \alpha_m + k)$ ein Scoring-Protokoll und es gilt für alle Kandidaten $c \in C$ über jeder Wählerliste V:

Kandidat c ist (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α genau dann, wenn Kandidat c (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α_{+k} ist.

(b) Für alle natürlichen Zahlen k ist $\alpha_{\cdot k} := k\alpha := (k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_m)$ ein Scoring-Protokoll und es gilt für alle Kandidaten $c \in C$ über jeder Wählerliste V:

Kandidat c ist (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α genau dann, wenn Kandidat c (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls $\alpha_{\cdot k}$ ist.

Lösungsvorschlag: Gegeben sei das Scoring-Protokoll $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Sei $score_\alpha(c)$ die Punktzahl von c in der Wahl (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α.

(a) Da $k \geq 0$, folgt mit dem Fakt, dass α ein Scoring-Protokoll ist, $\alpha_1 + k \geq \alpha_2 + k \geq \ldots \geq \alpha_m + k$. Damit ist α_{+k} ein Scoring-Protokoll und es gilt $score_{\alpha_{+k}}(c) = score_\alpha(c) + k\|V\|$.

„$\Rightarrow$“ Angenommen, c habe den höchstens Score bezüglich α, dann hat c auch den höchsten Score bezüglich α_{+k}, da jeder Kandidat bezüglich α_{+k} genau $k\|V\|$ Punkte hinzubekommt (im Vergleich zu α).
„$\Leftarrow$“ Angenommen, c habe den höchsten Score bezüglich α_{+k}, so hat c auch den höchsten Score bezüglich α, weil alle Kandidaten genau $k\|V\|$ Punkte verlieren (im Vergleich zu α_{+k}).

(b) Da $k \geq 0$, folgt mit dem Fakt, dass α ein Scoring-Protokoll ist, $k\alpha_1 \geq k\alpha_2 \geq \ldots \geq k\alpha_m$. Damit ist $\alpha_{\cdot k}$ ein Scoring-Protokoll und es gilt $score_{\alpha_{\cdot k}}(c) = k \cdot score_\alpha(c)$.

„$\Rightarrow$“ Angenommen, c habe den höchstens Score bezüglich α, dann hat c auch den höchsten Score bezüglich $\alpha_{\cdot k}$, da jeder Kandidat das k-fache seines Scores bezüglich α erhält.
„$\Leftarrow$“ Angenommen, c habe den höchsten Score bezüglich $\alpha_{\cdot k}$, so hat c auch den höchsten Score bezüglich α, weil alle Kandidaten genau ein k-tel ihrer Punkte bezüglich $\alpha_{\cdot k}$ erhalten.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Manipulation
Sie haben in der Vorlesung verschiedene Varianten von Manipulation und die entsprechenden Entscheidungsprobleme kennengelernt. Wie kann man für ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ zeigen, dass die zugehörigen Manipulationsprobleme in NP liegen? Wann funktioniert diese Vorgehensweise nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag: Wir raten die Stimmen der manipulierenden Wähler und überprüfen, ob die Manipulation erfolgreich ist oder nicht. Dies geht nur, wenn die Gewinnerbestimmung in $\mathcal{E}$ in Polynomialzeit möglich ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte): PARTITION und SOS
Die Entscheidungsprobleme PARTITION und SUBSET OF SUMS seien wie folgt definiert:

PARTITION	
Gegeben:	Eine Folge $(k_1, \ldots, k_n)$ positiver ganzer Zahlen, wobei $\sum_{i=1}^{n} k_i$ eine gerade Zahl ist.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass gilt: $$\sum_{i \in A} k_i = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}-A} k_i?$$

SUBSET OF SUMS (SOS)	
Gegeben:	Eine Folge $(k_1, \ldots, k_n)$ positiver ganzer Zahlen und eine positive natürliche Zahl l.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass gilt: $$\sum_{i \in A} k_i = l?$$

Es sei nun $(1, 9, 5, 3, 8)$ gegeben.

(a) Ist $(1, 9, 5, 3, 8)$ eine Ja-Instanz für PARTITION? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Entscheiden Sie für jedes $l \in \{2, 12, 15, 17\}$, ob $((1, 9, 5, 3, 8), l)$ eine Ja-Instanz für SUBSET OF SUMS ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag: Es gilt $\sum_{i=1}^{5} k_i = 26$.

(a) Es ist eine Ja-Instanz mit der Partition $(A, \{1, \dots, 5\} - A)$, wobei $A = \{1, 2, 4\}$. Es gilt $\sum_{i \in A} k_i = 1 + 9 + 3 = 13$.

(b) **$l = 2$:** $((1, 9, 5, 3, 8), 2)$ ist eine Nein-Instanz, da aufgrund der Werte der k_i die Summe 2 nie erreicht werden kann.

$l = 12$: $((1, 9, 5, 3, 8), 12)$ ist eine Ja-Instanz: Z.B. mit $A = \{2, 4\}$, $\sum_{i \in A} k_i = 9 + 3 = 12$ oder mit $A = \{1, 4, 5\}$, $\sum_{i \in A} k_i = 1 + 8 + 3 = 12$.

$l = 15$: $((1, 9, 5, 3, 8), 15)$ ist eine Ja-Instanz mit $A = \{1, 2, 3\}$, $\sum_{i \in A} k_i = 1 + 9 + 5 = 15$.

$l = 17$: $((1, 9, 5, 3, 8), 17)$ ist eine JA-Instanz mit $A = \{2, 5\}$, $\sum_{i \in A} k_i = 9+8 = 17$.

Aufgabe 4 (14 Punkte): SOS $\leq_m^p$ Partition, Partition $\leq_m^p$ SOS
Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

(a) Partition $\leq_m^p$ SOS und

(b) SOS $\leq_m^p$ Partition.

Hinweis: Achten Sie darauf, nicht nur jeweils die Reduktion anzugeben, sondern auch dessen Korrektheit zu beweisen.

Lösungsvorschlag:

(a) Es sei $(k_1, \dots, k_n)$ eine Partition-Instanz mit $\sum_{i=1}^{n} k_i = 2l$. Wir konstruieren daraus die SOS-Instanz $((k_1, \dots, k_n), l)$. Dies ist offensichtlich in Polynomialzeit möglich. Bleibt die Äquivalenz zu zeigen:

Von links nach rechts: Es sei $(k_1, \dots, k_n)$ eine Ja-Instanz für Partition mit $(A, \{1, \dots, n\} - A)$. Es gilt also $\sum_{i \in A} k_i = l$. Somit ist A die gesuchte Teilmenge für $((k_1, \dots, k_n), l)$.

Von rechts nach links: Es sei $((k_1, \dots, k_n), l)$ eine Ja-Instanz für SOS mit der Teilmenge $A \subseteq \{1, \dots, n\}$. Es gilt also $\sum_{i \in A} k_i = l$. Somit ist $(A, \{1, \dots, n\} - A)$ eine Partition für $(k_1, \dots, k_n)$.

(b) Es sei $((k_1, \dots, k_n), l)$ eine SOS-Instanz mit $S = \sum_{i=1}^{n} k_i$. Wir unterscheiden in 3 Fälle:

Fall 1: $l = \frac{S}{2}$. Argumentation analog zu (a).

Fall 2: $l > \frac{S}{2}$. Wir definieren die PARTITION-Instanz $(k_1, \ldots, k_n, k_{n+1})$ mit $k_{n+1} = 2l - S$. Es gilt $\sum_{i=1}^{n+1} k_i = S + 2l - S = 2l$. Diese Transformation ist offensichtlich in Polynomialzeit möglich. Die Äquivalenz kann analog zu (a) gezeigt werden.

Fall 3: $l < \frac{S}{2}$. Wir definieren die PARTITION-Instanz $(k_1, \ldots, k_n, k_{n+1})$ mit $k_{n+1} = S - 2l$.

Es gilt $\sum_{i=1}^{n+1} k_i = 2S - 2l = 2(S - l)$. Es gilt $l < S$, also ist $(k_1, \ldots, k_n, k_{n+1})$ eine PARTITION-Instanz und diese Transformation ist offensichtlich in Polynomialzeit möglich. Bleibt die Äquivalenz zu zeigen:

Von links nach rechts: Es sei $((k_1, \ldots, k_n), l)$ eine Ja-Instanz für SOS, dann gibt es ein $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in A} k_i = l$. Damit gilt dann, dass

$$(A \cup \{n+1\}, \{1, \ldots, n+1\} - (A \cup \{n+1\}))$$

eine Partition von $\{1, \ldots, n+1\}$ ist, denn

$$\sum_{i \in A \cup \{n+1\}} k_i = l + S - 2l = S - l.$$

Von rechts nach links: Es sei $(k_1, \ldots, k_n, k_{n+1})$ eine Ja-Instanz für PARTITION mit der Partition $(A, \{1, \ldots, n+1\} - A)$. Es gilt, dass $n+1 \in A$ oder $n+1 \in \{1, \ldots, n+1\} - A$. OBdA sei nun $n+1 \in A$. Dann gilt

$$\sum_{i \in A - \{n+1\}} k_i = S - l - S + 2l = l.$$

Da $A - \{n+1\}$ eine echte Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$ ist, ist $((k_1, \ldots, k_n), l)$ eine Ja-Instanz für *SOS* mit der Teilmenge A.