Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Wintersemester 2021/22
Übungsblatt 4

Übung zur Vorlesung
Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 02. November bis 09. November, 12:00 mittags
Verantwortlich: Marc Neveling

Aufgabe 1 (12 Punkte): Scoring-Protokolle
Gegeben sei ein Scoring-Protokoll mit Scoring-Vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ für eine Wahl mit m Kandidaten. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) Für alle natürlichen Zahlen k ist $\alpha_{+k} := \alpha + k := (\alpha_1 + k, \alpha_2 + k, \ldots, \alpha_m + k)$ ein Scoring-Protokoll und es gilt für alle Kandidaten $c \in C$ über jeder Wählerliste V:

Kandidat c ist (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α genau dann, wenn Kandidat c (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α_{+k} ist.

(b) Für alle natürlichen Zahlen k ist $\alpha_{\cdot k} := k\alpha := (k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_m)$ ein Scoring-Protokoll und es gilt für alle Kandidaten $c \in C$ über jeder Wählerliste V:

Kandidat c ist (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α genau dann, wenn Kandidat c (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls $\alpha_{\cdot k}$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Manipulation
Sie haben in der Vorlesung verschiedene Varianten von Manipulation und die entsprechenden Entscheidungsprobleme kennengelernt. Wie kann man für ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ zeigen, dass die zugehörigen Manipulationsprobleme in NP liegen? Wann funktioniert diese Vorgehensweise nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Partition und SOS
Die Entscheidungsprobleme Partition und Subset Of Sums seien wie folgt definiert:

Partition	
Gegeben:	Eine Folge $(k_1, \ldots, k_n)$ positiver ganzer Zahlen, wobei $\sum_{i=1}^{n} k_i$ eine gerade Zahl ist.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass gilt: $\sum_{i \in A} k_i = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\} - A} k_i$?

Subset Of Sums (SOS)	
Gegeben:	Eine Folge $(k_1, \ldots, k_n)$ positiver ganzer Zahlen und eine positive natürliche Zahl l.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass gilt: $\sum\limits_{i \in A} k_i = l$?

Es sei nun $(1, 9, 5, 3, 8)$ gegeben.

(a) Ist $(1, 9, 5, 3, 8)$ eine Ja-Instanz für Partition? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Entscheiden Sie für jedes $l \in \{2, 12, 15, 17\}$, ob $((1, 9, 5, 3, 8), l)$ eine Ja-Instanz für Subset Of Sums ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (14 Punkte): SOS $\leq_m^p$ Partition, Partition $\leq_m^p$ SOS
Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

(a) Partition $\leq_m^p$ SOS und

(b) SOS $\leq_m^p$ Partition.

Hinweis: Achten Sie darauf, nicht nur jeweils die Reduktion anzugeben, sondern auch dessen Korrektheit zu beweisen.