

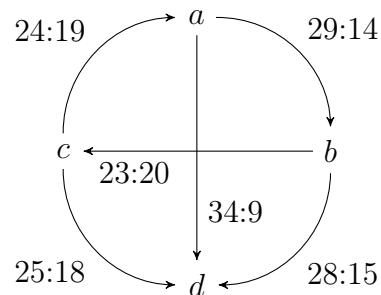
Lösungsvorschläge Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 26. Oktober bis 02. November, 12:00 mittags
Verantwortlich: Marc Neveling

Aufgabe 1 (8 Punkte): Dodgson Wahlsystem

Betrachten Sie die Beispielwahl aus der Vorlesung zum Dodgson Wahlsystem und den dazugehörigen Mehrheitsgraph.

	Stimmen			
15 Stimmen:	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>b</i>
9 Stimmen:	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
9 Stimmen:	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>c</i>
5 Stimmen:	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
5 Stimmen:	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>

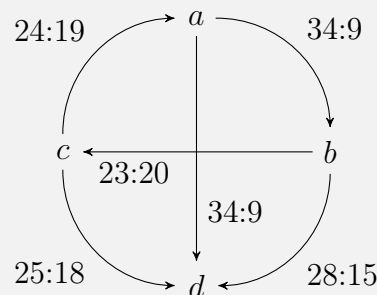


- (a) Zeigen Sie, dass der DScore für *b*, *c* und *d* jeweils größer als 3 ist.
- (b) Seien nun wie in der Vorlesung die letzten 5 Stimmen von *b a c d* zu *a b c d* geändert. Zeigen Sie, dass der DScore für *a*, *b* und *d* jeweils größer als 2 ist.

Lösungsvorschlag: Bemerke zunächst, dass ein einzelner Swap den direkten Vergleich der beiden "geswappten" Kandidaten um 2 Zähler ändert, da der nach vorne bewegte Kandidat im direkten Vergleich die Stimme nun gewinnt und der andere (nach hinten bewegte) Kandidat die Stimme nun verliert.

- (a) *b*: *b* verliert den direkten Vergleich zu *a* mit 14 zu 29. Dieser Abstand ist zu groß, um ihn mit 3 Swaps einzuholen.
- c*: *c* verliert nur gegen *b* mit 20 zu 23. 2 direkte Swaps der beiden Kandidaten könnten also reichen, um das Verhältnis auf 21 zu 22 zu verändern. Mit 3 Swaps benötigt man jedoch mindestens eine Stimme der Form ... *b c* ..., welche es nicht gibt.
- d*: *d* verliert gegen alle 3 anderen Kandidaten im direkten Vergleich und bräuchte daher mindestens 3 Swaps, um jeden der Vergleiche umzukehren und zu gewinnen, sofern alle Vergleiche mit nur einer Stimme verloren werden. Das ist nicht gegeben.

(b) Der Mehrheitsgraph hat sich wie folgt verändert.



- a*: *a* verliert gegen *c* mit 19 zu 24 und bräuchte im besten Fall mindestens 3 Swaps, um gegen *c* zu gewinnen.
- b*: *b* verliert gegen *a* mit 9 zu 34 Stimmen, was nicht einholbar ist mit nur einem 2 Swap.
- d*: *d* verliert drei direkte Vergleiche und bräuchte somit mindestens 3 Swaps, um alle zu gewinnen.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Komplexitätstheorie

(a) Das Komplement einer Menge A ist definiert durch $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin A\}$.

Zeigen Sie die Aussage:

$$\text{Aus } A \leq_m^p B \text{ folgt } \overline{A} \leq_m^p \overline{B}.$$

(b) Um die NP-Härte einer Menge zu zeigen, kann die folgende Aussage herangezogen werden:

Ist A NP-hart und gilt $A \leq_m^p B$, dann ist auch B NP-hart.

Beweisen Sie diese Aussage.

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der NP-Härte und die Transitivität der $\leq_m^p$ -Reduzierbarkeit (aus $A \leq_m^p B$ und $B \leq_m^p C$ folgt $A \leq_m^p C$).

Lösungsvorschlag:

(a) Aus der Voraussetzung folgt, dass es ein in Polynomialzeit berechenbares f gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$\begin{aligned} (x \in A &\Leftrightarrow f(x) \in B) \\ \Leftrightarrow (x \notin A &\Leftrightarrow f(x) \notin B) \\ \Leftrightarrow (x \in \overline{A} &\Leftrightarrow f(x) \in \overline{B}) \end{aligned}$$

Also gilt $\overline{A} \leq_m^p \overline{B}$.

(b) Aus der NP-Härte von A folgt, dass $D \leq_m^p A$ gilt für alle $D \in \text{NP}$. Da nun $A \leq_m^p B$ gilt, folgt mit der Transitivität der $\leq_m^p$ -Reduzierbarkeit, dass $D \leq_m^p B$.

gilt. Und zwar für alle $D \in \text{NP}$. Damit ist B NP-hart.

Aufgabe 3 (7 Punkte): X3C

Das Entscheidungsproblem X3C sei wie folgt definiert:

EXACT COVER BY THREE SETS (X3C)	
<i>Gegeben:</i>	Eine Menge $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{3m}\}$, wobei $m \geq 1$, und eine Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ mit $\ S_i\ = 3$ und $S_i \subseteq B$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$.
<i>Frage:</i>	Gibt es eine Teilmenge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ derart, dass jedes Element aus B in genau einer der Teilmengen aus $\mathcal{S}'$ enthalten ist?

(a) Entscheiden Sie, ob die folgende X3C-Instanz eine Ja-Instanz ist: $(B, \mathcal{S})$ mit

- $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{12}\}$
- $\mathcal{S} = \{\{b_1, b_2, b_7\}, \{b_{11}, b_2, b_7\}, \{b_2, b_8, b_3\}, \{b_{11}, b_{10}, b_{12}\}, \{b_6, b_1, b_{10}\}, \{b_3, b_9, b_8\}, \{b_7, b_{11}, b_6\}, \{b_4, b_{12}, b_{10}\}, \{b_9, b_5, b_3\}, \{b_4, b_5, b_6\}\}$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Geben Sie eine Nein-Instanz $(B, \mathcal{S})$ für X3C mit $m \geq 3$ und $\|\mathcal{S}\| \geq 2m$ an, wobei jedes $b_i \in B$ in mindestens einem $S_j \in \mathcal{S}$ vorkommt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

(a) $\mathcal{S}' = \{\{b_1, b_2, b_7\}, \{b_{11}, b_{10}, b_{12}\}, \{b_3, b_9, b_8\}, \{b_4, b_5, b_6\}\}$ ist eine exakte Überdeckung für B .

(b) Eine Nein-Instanz ist zum Beispiel: $(B, \mathcal{S})$ mit

- $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$
- $\mathcal{S} = \{\{b_1, b_2, b_3\}, \{b_4, b_5, b_6\}, \{b_6, b_7, b_8\}, \{b_6, b_7, b_9\}, \{b_1, b_7, b_9\}, \{b_1, b_4, b_9\}\}$.

Denn $\{b_1, b_2, b_3\}, \{b_4, b_5, b_6\}$ müssen Bestandteil einer Lösung sein.

Aufgabe 4 (7 Punkte): Manipulation in PV

Gegeben sei die PV-Wahl (C_1, V_1) mit $C_1 = \{a, b, c, d\}$ und 4 Wählern in V_1 mit den folgenden Gewichten $g_V : V \rightarrow \mathbb{N}$ und Präferenzen:

Wähler	Präferenz	Gewicht $g_V(v_i)$
v_1 :	$a b c d$	3
v_2 :	$b c a d$	4
v_3 :	$c d b a$	1
v_4 :	$b c d a$	5

Gegeben sei die Instanz (C_1, V_1, S, b) , wobei in $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ 3 manipulierende Wähler mit den Gewichten $g_S(s_1) = 1, g_S(s_2) = 1, g_S(s_3) = 4$ enthalten sind. Entscheiden Sie, ob diese Instanz eine Ja-Instanz von PLURALITY-DESTRUCTIVE COALITIONAL WEIGHTED MANIPULATION für eindeutige Gewinner ist. Geben Sie gegebenenfalls die Stimmen der manipulierenden Wähler explizit an.

Lösungsvorschlag: Kandidat b gewinnt mit einem Score von 9 die Wahl (C_1, V_1) . Kandidat c kann b nicht schlagen, selbst wenn c in allen Stimmen aus S auf den ersten Platz gewählt wird. Kandidat a kann aber mit b gleichziehen, indem alle Wähler aus S diesen auf den ersten Platz wählen. Damit sind a und b uneindeutige Gewinner und die Manipulation ist erfolgreich.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Manipulation in Regular Cup
Gegeben seien die Regular Cup-Wahlen (C_i, V_i) mit $i \in \{2, 3\}$:

$C_2 = \{a, b, c, d\}$	$C_3 = \{a, b, c, d, e\}$
$V_2 :$	$V_3 :$
$abcd$	$abcde$
$bcd a$	$cdeba$
$cdb a$	$bcd e a$
$cb a d$	$adbec$
	$ecba d$

Die Zuteilung der Blätter erfolge alphabetisch von links nach rechts. In der ersten Runde tritt also a gegen b an und c tritt gegen d an. Gleichstände werden lexikographisch gebrochen: Es gewinnt der lexikographisch kleinere Kandidat.

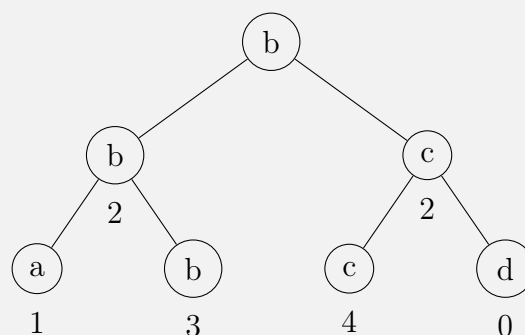
Wir betrachten das eindeutige Gewinnermodell. Entscheiden Sie, ob

- (a) (C_2, V_2, S, c) mit $\|S\| = 2$ eine Ja-Instanz für REGULAR CUP-CONSTRUCTIVE COALITIONAL MANIPULATION ist und
- (b) (C_3, V_3, c) eine Ja-Instanz für REGULAR CUP-CONSTRUCTIVE MANIPULATION ist.

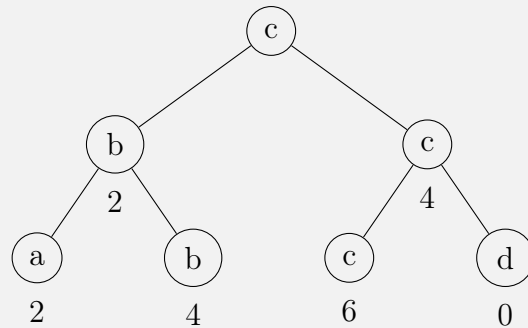
Geben Sie bei Ja-Instanzen die Stimme(n) der (des) manipulierenden Wähler(s) explizit an. Konstruieren Sie für alle betrachteten Wahlen den entsprechenden Binärbaum.

Lösungsvorschlag: Gegeben seien die Regular Cup-Wahlen

- (a) Baum zu (C_2, V_2) :

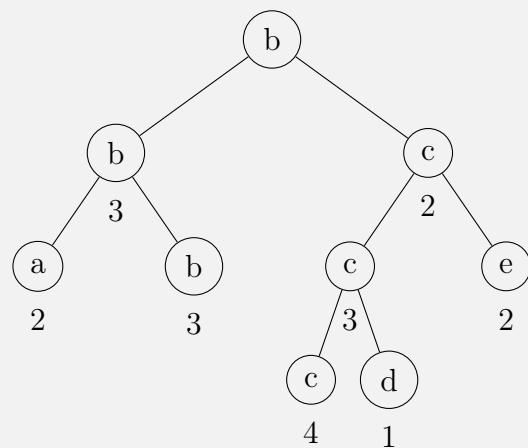


Also ist b Regular Cup-Gewinner in (C_2, V_2) . Angenommen, die beiden Wähler in S stimmen wie folgt ab: $c d a b$ und $c b a d$. Dann entsteht für die Wahl $(C_2, V_2 \cup S)$ der Baum:

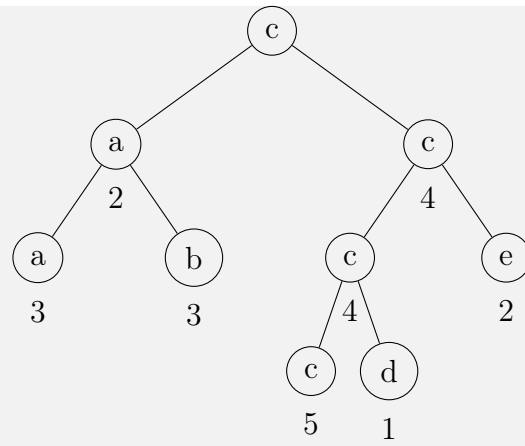


Damit ist c der Gewinner in der resultierenden Wahl und es handelt sich um eine Ja-Instanz.

(b) Baum zu (C_3, V_3) :



Kandidat b ist also Regular-Cup-Gewinner der Wahl (C_3, V_3) . Wenn der manipulierende Wähler s zum Beispiel die Stimme $c a b d e$ abgibt, entsteht folgende Wahl $(C_3, V_3 \cup \{s\})$:



c konnte zum eindeutigen Gewinner gemacht werden. Somit handelt es sich um eine Ja- Instanz.