Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Wintersemester 2021/22
Übungsblatt 3

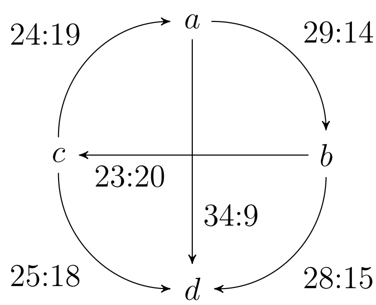
Übung zur Vorlesung

Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 26. Oktober bis 02. November, 12:00 mittags
Verantwortlich: Marc Neveling

Aufgabe 1 (8 Punkte): Dodgson Wahlsystem
Betrachten Sie die Beispielwahl aus der Vorlesung zum Dodgson Wahlsystem und den dazugehörigen Mehrheitsgraph.

	Stimmen			
15 Stimmen:	c	a	d	b
9 Stimmen:	b	d	c	a
9 Stimmen:	a	b	d	c
5 Stimmen:	a	c	b	d
5 Stimmen:	b	a	c	d



(a) Zeigen Sie, dass der DScore für b, c und d jeweils größer als 3 ist.

(b) Seien nun wie in der Vorlesung die letzten 5 Stimmen von $b\ a\ c\ d$ zu $a\ b\ c\ d$ geändert. Zeigen Sie, dass der DScore für a, b und d jeweils größer als 2 ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Komplexitätstheorie

(a) Das Komplement einer Menge A ist definiert durch $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin A\}$.

Zeigen Sie die Aussage:

$$\text{Aus } A \leq_m^p B \text{ folgt } \overline{A} \leq_m^p \overline{B}.$$

(b) Um die NP-Härte einer Menge zu zeigen, kann die folgende Aussage herangezogen werden:

$$\text{Ist } A \text{ NP-hart und gilt } A \leq_m^p B, \text{ dann ist auch } B \text{ NP-hart.}$$

Beweisen Sie diese Aussage.
Hinweis: Verwenden Sie die Definition der NP-Härte und die Transitivität der $\leq_m^p$-Reduzierbarkeit (aus $A \leq_m^p B$ und $B \leq_m^p C$ folgt $A \leq_m^p C$).

Aufgabe 3 (7 Punkte): X3C
Das Entscheidungsproblem X3C sei wie folgt defininiert:

	EXACT COVER BY THREE SETS (X3C)
Gegeben:	Eine Menge $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{3m}\}$, wobei $m \geq 1$, und eine Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $\|S_i\| = 3$ und $S_i \subseteq B$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ derart, dass jedes Element aus B in genau einer der Teilmengen aus $\mathcal{S}'$ enthalten ist?

(a) Entscheiden Sie, ob die folgende X3C-Instanz eine Ja-Instanz ist: $(B, \mathcal{S})$ mit

- $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{12}\}$
- $\mathcal{S} = \{\{b_1, b_2, b_7\}, \{b_{11}, b_2, b_7\}, \{b_2, b_8, b_3\}, \{b_{11}, b_{10}, b_{12}\}, \{b_6, b_1, b_{10}\}, \{b_3, b_9, b_8\}, \{b_7, b_{11}, b_6\}, \{b_4, b_{12}, b_{10}\}, \{b_9, b_5, b_3\}, \{b_4, b_5, b_6\}\}$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Geben Sie eine Nein-Instanz $(B, \mathcal{S})$ für X3C mit $m \geq 3$ und $\|\mathcal{S}\| \geq 2m$ an, wobei jedes $b_i \in B$ in mindestens einem $S_j \in \mathcal{S}$ vorkommt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (7 Punkte): Manipulation in PV
Gegeben sei die PV-Wahl (C_1, V_1) mit $C_1 = \{a, b, c, d\}$ und 4 Wählern in V_1 mit den folgenden Gewichten $g_V : V \rightarrow \mathbb{N}$ und Präferenzen:

Wähler	Präferenz	Gewicht $g_V(v_i)$
v_1:	$a\,b\,c\,d$	3
v_2:	$b\,c\,a\,d$	4
v_3:	$c\,d\,b\,a$	1
v_4:	$b\,c\,d\,a$	5

Gegeben sei die Instanz (C_1, V_1, S, b), wobei in $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ 3 manipulierende Wähler mit den Gewichten $g_S(s_1) = 1, g_S(s_2) = 1, g_S(s_3) = 4$ enthalten sind. Entscheiden Sie, ob diese Instanz eine Ja-Instanz von PLURALITY-DESTRUCTIVE COALITIONAL WEIGHTED MANIPULATION für eindeutige Gewinner ist. Geben Sie gegebenenfalls die Stimmen der manipulierenden Wähler explizit an.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Manipulation in Regular Cup
Gegeben seien die Regular Cup-Wahlen (C_i, V_i) mit $i \in \{2, 3\}$:

$C_2 = \{a, b, c, d\}$		$C_3 = \{a, b, c, d, e\}$	
V_2 :	$a\,b\,c\,d$	V_3 :	$a\,b\,c\,d\,e$
	$b\,c\,d\,a$		$c\,d\,e\,b\,a$
	$c\,d\,b\,a$		$b\,c\,d\,e\,a$
	$c\,b\,a\,d$		$a\,d\,b\,e\,c$
			$e\,c\,b\,a\,d$

Die Zuteilung der Blätter erfolge alphabetisch von links nach rechts. In der ersten Runde tritt also a gegen b an und c tritt gegen d an. Gleichstände werden lexikographisch gebrochen: Es gewinnt der lexikographisch kleinere Kandidat.
Wir betrachten das eindeutige Gewinnermodell. Entscheiden Sie, ob

(a) (C_2, V_2, S, c) mit $\|S\| = 2$ eine Ja-Instanz für Regular Cup-Constructive Coalitional Manipulation ist und

(b) (C_3, V_3, c) eine Ja-Instanz für Regular Cup-Constructive Manipulation ist.

Geben Sie bei Ja-Instanzen die Stimme(n) der (des) manipulierenden Wähler(s) explizit an. Konstruieren Sie für alle betrachteten Wahlen den entsprechenden Binärbaum.