Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Wintersemester 2021/22
Übungsblatt 2

Lösungsvorschläge
Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 19. Oktober bis 26. Oktober, 12:00 mittags
Verantwortlich: Marc Neveling

Aufgabe 1 (13 Punkte): Die Wahlsysteme Condorcet, Dodgson, Young und Copeland

Gegeben seien die beiden Wahlen (C, V) und (C, W). Die Kandidatenmenge bestehe jeweils aus 4 Kandidaten, $C = \{a, b, c, d\}$, und die Präferenzen der Wähler seien wie folgt:

	V		W
Wähler v_1 :	$c > d > a > b$	Wähler w_1 :	$a > b > c > d$
Wähler v_2 :	$a > c > b > d$	Wähler w_2 :	$b > a > d > c$
Wähler v_3 :	$a > b > c > d$	Wähler w_3 :	$d > b > c > a$
Wähler v_4 :	$b > a > c > d$	Wähler w_4 :	$d > c > b > a$

Bestimmen Sie in beiden Wahlen den Condorcet-Gewinner (soweit dieser existiert), den Dodgson-, den Young und den Copeland-Gewinner.

Lösungsvorschlag: Verhältnisse in (C, V):

	a	b	c	d
a	-	3:1	3:1	3:1
b	1:3	-	2:2	3:1
c	1:3	2:2	-	4:0
d	1:3	2:2	0:4	-

Damit ist Kandidat a der Condorcet-Gewinner in dieser Wahl. Daraus folgt, dass Kandidat a ebenso Dodgson-Gewinner ist (mit Score(a)=0) und auch Young-Gewinner, da kein Wähler entfernt werden muss, damit a zum Condorcet-Gewinner gemacht werden kann. Kandidat a hat auch einen maximalen Copeland-Score von 3 und ist somit Copeland-Gewinner.

Verhältnisse in (C, W):

	a	b	c	d
a	-	1:3	2:2	2:2
b	3:1	-	3:1	2:2
c	2:2	1:3	-	1:3
d	2:2	2:2	3:1	-

In dieser Wahl gibt es keinen Condorcet-Gewinner.

(a) Bestimmung der Dodgson-Scores (Da es keinen Condorcet-Gewinner gibt, ist der Dodgson-Score aller Kandidaten mindestens 1):

  (a) Kandidat a: Damit a Condorcet-Gewinner werden kann, muss er/sie die Kandidaten b,c und d schlagen, d.h., dass mindestens zwei Vertauschungen vorgenommen werden müssen. Da aber a in den Stimmen, in denen er/sie hinter c bzw. d steht, auf dem letzten Platz platziert ist, und d in beiden Stimmen auf dem ersten Platz, müssen insgesamt 3 Vertauschungen vorgenommen werden, damit a die Kandidaten b und c schlägt. Zusätzlich muss a b noch einmal schlagen, das heißt, eine weitere Vertauschung ist notwendig. Insgesamt haben wir damit 4 Vertauschungen, zum Beispiel: $w_3 \rightarrow w_3' : a > d > b > c$ und $w_4 \rightarrow w_4' : d > c > a > b$

  $\Rightarrow$ Score(a) = 4.

  (b) Kandidat b: Damit b Condorcet-Gewinner werden kann, muss er/sie Kandidat d schlagen, d.h., es muss mindestens eine Vertauschung vorgenommen werden. Diese eine reicht auch aus, zum Beispiel: $w_3 \rightarrow w_3' : b > d > c > a$.

  $\Rightarrow$ Score(b) = 1.

  (c) Kandidat c : Damit c Condorcet-Gewinner werden kann, muss er/sie die Kandidaten a, b und d schlagen. Insgesamt sind also mindestens fünf Vertauschungen notwendig. Zum Beispiel: $w_2 \rightarrow w_2' : c > b > a > d$ und $w_3 \rightarrow w_3' : c > d > b > a$.

  $\Rightarrow$ Score(c) = 5.

  (d) Kandidat d : Damit d zum Condorcet-Gewinner gemacht werden kann, muss er/sie die Kandidaten a und b schlagen. d muss in jeweils einer Stimme durch die Vertauschung vor a bzw. b stehen. Dementsprechend sind mindestens zwei Vertauschungen notwendig, zum Beispiel: $w_2 \rightarrow w_2' : d > b > a > c$.

  $\Rightarrow$ Score(d) = 2.

  Kandidat b ist also der Dodgson-Gewinner mit einem Score von 1 in der Wahl (C, W).

(b) Bestimmung des Young-Gewinners (Da es keinen Condorcet-Gewinner gibt, muss mindestens immer ein Wähler gelöscht werden.):

  (a) Kandidat a: Damit a nicht von Kandidat b geschlagen wird (oder Gleichstand mit diesem erzielt), müssen mindestens 3 Wähler entfernt werden. Da es nur 4 Wähler gibt, muss a in einer Stimme auf dem ersten Platz eingeordnet sein, damit a nach dem Löschen von 3 Wählern Condorcet-Gewinner sein kann. Dies ist der Fall, lösche also w_2, w_3, w_3.

  $\Rightarrow$ Es müssen 3 Wähler gelöscht werden.

(b) Kandidat b: Damit b Condorcet-Gewinner wird, reicht es, nur einen Wähler zu löschen, der d vor b platziert. Da b sowohl vor a als auch vor c zwei Punkte Vorsprung hat, kann frei gewählt werden, ob w_3 oder w_4 entfernt wird.

$\Rightarrow$ Es muss 1 Wähler gelöscht werden.

(c) Kandidat c: In Analogie zu Kandidat a müssten auch für Kandidat c mindestens 3 Wähler entfernt werden. Da aber Kandidat c in keiner Stimme auf Platz 1 einsortiert ist, kann c selbst dann kein Condorcet-Gewinner sein.

(d) Kandidat d: Kandidat d muss die Gleichstände mit den Kandidaten a und b auflösen. Da es eine Stimme gibt, in der sowohl a als auch b vor d platziert ist, kann durch das Löschen eben dieser (w_1 oder w_2), Kandidat d zum Condorcet-Gewinner gemacht werden.

$\Rightarrow$ Es muss 1 Wähler gelöscht werden.

Damit sind also die Kandidaten b und d Young-Gewinner in der Wahl (C, W).

(c) Bestimmung des Copeland-Gewinners (Da es keinen Condorcet-Gewinner gibt, ist der Copeland-Score echt kleiner als die Anzahl der Kandidaten):

(a) $\text{CScore}(a) = 1$

(b) $\text{CScore}(b) = 2\frac{1}{2}$

(c) $\text{CScore}(c) = \frac{1}{2}$

(d) $\text{CScore}(d) = 2$

Kandidat b ist also der Copeland-Gewinner mit einem Score von $2\frac{1}{2}$.

Aufgabe 2 (7 Punkte): Mehrheitskriterium

(a) Welche der folgenden Wahlsysteme erfüllen das Mehrheitskriterium: Veto, Condorcet, Single Transferable Vote (STV), Plurality with Runoff? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Um zu zeigen, dass eine Eigenschaft nicht erfüllt ist, reicht die Angabe eines Gegenbeispiels aus.

(b) Was kann aus dem Ergebnis für das Condorcet-Wahlsystem aus Aufgabenteil (a) für die Wahlsysteme Copeland, Dodgson, Young und Black gefolgert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

(a) **Veto:** Gegenbeispiel ist die Wahl (C_1, V_1) mit $C_1 = \{a, b, c, d, e\}$ und $V_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$:

$$\begin{array}{llllll} v_1: & a & b & c & d & e \\ v_2: & a & b & c & d & e \\ v_3: & a & b & c & d & e \\ v_4: & b & c & d & e & a \end{array}$$

Kandidat a ist der Mehrheitsgewinner, die Kandidaten b und c sind jedoch Veto-Gewinner.

Condorcet: Condorcet erfüllt das Mehrheitskriterium, denn wenn es einen Kandidaten gibt, der in mehr als der Hälfte aller Stimmen auf dem ersten Platz platziert ist, so schlägt er in diesen Stimmen alle anderen Kandidaten. Durch die absolute Mehrheit ist damit garantiert, dass dieser Kandidat jeden anderen Kandidaten strikt schlägt und er ist somit auch Condorcet-Gewinner.

STV: Gibt es einen Kandidaten, der auf dem ersten Platz bereits eine absolute Mehrheit der Stimmen hat, so hat dieser immer einen strikt größeren PV-Score als die anderen Kandidaten, er bleibt also bei der Eliminierung in den einzelnen Runden immer übrig. (Anmerkung: STV kann auch so definiert werden, dass nach abs. Mehrheit geschaut wird, und nur so lange eliminiert wird, bis ein Kandidat abs. Mehrheit hat.)

PV-wro: Gibt es einen Kandidaten, der eine absolute Mehrheit erreicht, so nimmt dieser immer an der Stichwahl teil und gewinnt diese auch immer.

(b) Es gilt, dass Condorcet das Mehrheitskriterium erfüllt. Somit folgt, dass wenn es einen Mehrheitsgewinner in einer Wahl gibt, dieser auch Condorcet-Gewinner ist. Damit folgt für jedes Wahlsystem, das wiederum das Condorcet-Kriterium erfüllt direkt, dass es auch das Mehrheitskriterium erfüllt.

Aufgabe 3 (6 Punkte): Condorcet-Kriterium

(a) Gegeben sei die Wahl (C_1, V_1) mit $C_1 = \{a, b, c, d, e\}$ und $V_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$:

$$\begin{array}{llllll} v_1: & a & b & c & d & e \\ v_2: & a & b & c & d & e \\ v_3: & a & b & c & d & e \\ v_4: & b & c & d & e & a \end{array}$$

Für welche Ihnen bekannten Wahlsysteme zeigt diese Wahl, dass das Condorcet-Kriterium nicht erfüllt ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Gegeben sei die Wahl (C_2, V_2) mit $C_2 = \{a, b, c, d\}$ und $V_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$:

$$\begin{array}{llllll} v_1: & a & b & c & d \\ v_2: & a & b & c & d \\ v_3: & d & b & c & a \\ v_4: & c & b & a & d \\ v_5: & d & b & a & c \end{array}$$

Für welche Ihnen bekannten Wahlsysteme zeigt diese Wahl, dass das Condorcet-Kriterium nicht erfüllt ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

(a) In (C_1, V_1) gelten die folgenden Verhältnisse und Punktwerte für Borda (B-Sc) und Veto (V-Sc):

	a	b	c	d	e	B-Sc	V-Sc
a	-	3:1	3:1	3:1	3:1	12	3
b	1:3	-	4:0	4:0	4:0	13	4
c	1:3	0:4	-	4:0	4:0	9	4
d	1:3	0:4	0:4	-	4:0	5	4
e	1:3	0:4	0:4	0:4	-	1	1

Kandidat a ist Condorcet-Gewinner, Kandidat b ist jedoch Borda-Gewinner und die Kandidaten b, c und d sind Veto-Gewinner.

(b) In (C_2, V_2) gelten die folgenden Verhältnisse:

	a	b	c	d
a	-	2:3	3:2	3:2
b	3:2	-	4:1	3:2
c	2:3	1:4	-	3:2
d	2:3	2:3	2:3	-

Kandidat b ist Condorcet-Gewinner. In einer STV-Auszählung scheidet in der ersten Runde b aus, Kandidat c in der zweiten Runde aus, Kandidat d scheidet in der dritten Runde aus; Kandidat a ist also STV-Gewinner. In einer PV-Wahl mit Stichwahl nimmt a mit Kandidat d am Finale teil und gewinnt die Stichwahl.

Aufgabe 4 (14 Punkte): Konsistenz-Kriterium

(a) Gegeben sei die Wahl (C_3, V_3) mit $C_3 = \{a, b, c\}$, 25 Wählern in V_3 und eine Partition (V_3', V_3'') von V_3:

	Gruppe	Anzahl	Präferenz
V_3'	1	7	$a\,b\,c$
	2	5	$b\,c\,a$
	3	4	$c\,a\,b$
V_3''	4	5	$a\,c\,b$
	5	4	$c\,b\,a$

Für welche Ihnen bekannten Wahlsysteme zeigt diese Wahl mit dieser Partition, dass das Konsistenz-Kriterium nicht erfüllt ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Welche Wahlsysteme, die Sie kennen, erfüllen das Konsistenz-Kriterium? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie sie beweisen.

Lösungsvorschlag:

(a) Es ergeben sich die Verhältnisse und Young-Scores (Y-Sc), die Copeland-Scores (C-Sc) und Borda-Scores (B-Sc) in den Wahlen (C_3, V_3),(C_3, V_3') und (C_3, V_3'') aus der folgenden Tabelle.

(C_3, V_3)						
	a	b	c	Y-Sc	C-Sc	B-Sc
a	-	16:9	12:13		1	
b	9:16	-	12:13		0	-
c	13:12	13:12	-	25	2	-

(C_3, V_3')						
	a	b	c	Y-Sc	C-Sc	B-Sc
a	-	11:5	7:9	13	1	18
b	5:11	-	12:4	9	1	17
c	9:7	4:12	-	7	1	13

(C_3, V_3'')						
	a	b	c	Y-Sc	C-Sc	B-Sc
a	-	5:4	5:4	9	2	-
b	4:5	-	0:9		0	-
c	4:5	9:0	-		1	-

- (C_3, V_3'): Es gibt *keinen Condorcet-Gewinner* in dieser Wahl, jeder Kandidat schlägt genau einen Kandidaten und es gibt keine Unentschieden. Damit sind *alle Kandidaten Copeland-Sieger* (also auch Kandidate a).

  Kandidat a hat den höchsten Borda-Score, ist somit *Black-Gewinner*.

  Durch das Löschen von 3 Stimmen aus der 2. Wählergruppe wird a zum Condorcet-Gewinner. Durch das Löschen von 7 Stimmen aus der 1. Wählergruppe kann b zum Condorcet-Gewinner gemacht werden. Durch das Löschen von 7 Stimmen aus der 1. Wählergruppe und zwei Stimmen aus der 2. Wählergruppe kann c zum Condorcet-Gewinner gemacht werden. Damit ist a der *Young-Gewinner*.

In einer Plurality-Stichwahl treten a und b gegeneinander an, und Kandidat a gewinnt die *Stichwahl.*

In STV besteht die zweite Runde aus den Kandidaten a und b und Kandidat a bleibt über, ist somit *STV-Gewinner.*

- (C_3, V_3''): Kandidat a ist der *Condorcet-Gewinner*, damit auch der *Black-, Copeland-* und *Young-Gewinner.*

  Kandidat a hat eine Mehrheit auf dem ersten Platz, ist somit *STV-Gewinner* und gewinnt ebenfalls eine *Plurality-Stichwahl.*

- (C_3, V_3): Kandidat c ist der Condorcet-Gewinner, damit auch der *Black-*, *Copeland-* und *Young-Gewinner*. In einer *Plurality-Stichwahl* nehmen Kandidat a und c teil, c ist jedoch der Gewinner.

  In *STV* scheidet Kandidat b in der ersten Runde aus, somit ist c auch STV-Gewinner.

Diese Wahl ist ein Gegenbeispiel für Black, Young, Copeland, STV, Plurality mit Stichwahl.

(b) Sei (C, V) eine **PV-Wahl** und wir partitionieren V in V_1, V_2. Es sei $c \in C$ der PV-Gewinner in (C, V_i) für $i \in \{1, 2\}$ also, gilt

$$\text{P-}score_{(C,V_i)}(c) \geq \text{P-}score_{(C,V_i)}(d)$$

für alle $d \in C - \{c\}$ und $i \in \{1, 2\}$. Für $m_i = \text{P-}score_{(C,V_i)}(c)$ für $i \in \{1, 2\}$ gilt:

$$\text{P-}score_{(C,V)}(c) = m_1 + m_2 \geq \text{P-}score_{(C,V_1)}(d) + \text{P-}score_{(C,V_2)}(d) = \text{P-}score_{(C,V)}(d)$$

für alle $d \in C - \{c\}$. Damit ist c auch PV-Gewinner in (C, V).

Gegeben sei eine **Borda-Wahl** (C, V) und eine Partition von V in V_1, V_2. Kandidat $c \in C$ sei der Borda-Gewinner in (C, V_i) für $i \in \{1, 2\}$. Es gilt also:

$$\text{B-}score_{(C,V_i)}(c) = m_i \geq \text{B-}score_{(C,V_i)}(d)$$

für alle $d \in C - \{c\}$ und $i \in \{1, 2\}$. Also gilt in (C, V):

$$\text{B-}score_{(C,V)}(c) = m_1 + m_2 \geq \text{B-}score_{(C,V_1)}(d) + \text{B-}score_{(C,V_2)}(d) = \text{B-}score_{(C,V)}(d)$$

für alle $d \in C - \{c\}$. Damit ist c auch Borda-Gewinner in (C, V).

Für eine Partition V_1, V_2 der Wählermenge V in einer **Veto-Wahl** (C, V) gilt

$$\text{V-}score_{(C,V_1)}(d) + \text{V-}score_{(C,V_2)}(d) = \text{V-}score_{(C,V)}(d)$$

für alle $d \in C$. Es kann also analog zu PV oder Borda argumentiert werden.

Sei (analog zur Notation zur Bestimmung des Copeland-Gewinners von den Folien) $N_{(C,V)}(c, d)$ die Anzahl der Wähler, die in der Wählermenge V den Kandidaten c gegenüber d bevorzugen. Gilt $N_{(C,V)}(c, d) > N_{(C,V)}(d, c)$, so schlägt c

den Kandidaten d strikt in V. Sei nun (V_1, V_2) eine Partition der Wählermenge V, dann gilt

$$N_{(C,V)}(c,d) = N_{(C,V_1)}(c,d) + N_{(C,V_2)}(c,d).$$

Sei nun Kandidat c Condorcet-Gewinner in beiden Unterwahlen (C, V_i) für $i \in \{1,2\}$, d.h., es gilt:

$$N_{(C,V_i)}(c,d) > N_{(C,V_i)}(d,c)$$

für alle $d \in C - \{c\}$ und $i \in \{1,2\}$. Es gilt also

$$N_{(C,V)}(c,d) = N_{(C,V_1)}(c,d)+N_{(C,V_2)}(c,d) > N_{(C,V_1)}(d,c)+N_{(C,V_2)}(d,c) = N_{(C,V)}(d,c)$$

für alle $d \in C - \{c\}$ und $i \in \{1,2\}$. Also ist c auch Condorcet-Gewinner in der Wahl (C, V).

Überblick über Ergebnisse auf dem Übungsblatt (fett gedruckte Einträge):

	Maj	Cond	Cons
Plurality	1	0	**1**
Borda	0	**0**	**1**
Veto	(**0**)	**0**	**1**
Condorcet	(**1**)	1	**1**
Copeland	(**1**)	1	**0**
Dodgson	(**1**)	1	0
Young	(**1**)	1	**0**
Black	(**1**)	1	**0**
STV	(**1**)	**0**	**0**
Plurality with Runoff	(**1**)	**0**	**0**