Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Wintersemester 2021/22
Übungsblatt 1

Lösungsvorschläge
Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 12. Oktober bis 19. Oktober, 12:00 mittags
Verantwortlich: Marc Neveling

Aufgabe 1 (10 Punkte): Doodle-Umfrage

Gegeben seien folgende Doodle-Abstimmungen über einen passenden Tag zum Wandern. Dabei kann man einem Termin nur zustimmen (✓) oder ihn ablehnen (leer).

(I)

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
A	✓			✓	✓
B		✓	✓	✓	
C	✓		✓	✓	
D		✓		✓	✓

(II)

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
A			✓	✓	✓
B		✓			✓
C	✓				
D	✓	✓	✓	✓	

(III)

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
A		✓		✓	
B	✓	✓	✓		✓
C		✓			
D	✓		✓	✓	

(a) Bestimmen Sie die Kandidatenmenge für Doodle-Abstimmung (I) und geben Sie an, wie die Präferenzen der Wähler im Allgemeinen formal dargestellt werden können.

(b) Welcher Tag sollte jeweils ausgewählt werden? Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösungsvorschlag:

$C = \{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}, \mathrm{Mi}, \mathrm{Do}, \mathrm{Fr}\}$; die Präferenzen können für eine fixierte Ordnung der Kandidaten als Approval-Vektoren aus $\{0, 1\}^{\|C\|}$ dargestellt werden.

(I) Da die Wahl einstimmig ist, sollte „Donnerstag“ gewinnen.

(II) Jeder Tag bekommt gleich viele Zustimmungen. Um diesen Gleichstand aufzulösen kann man die Anzahl der verteilten Zustimmungen als Grundlage nehmen. Da Wähler D und A die meisten Zustimmungen verteilt haben, sollte „Mittwoch“ oder „Donnerstag“ gewählt werden.

(III) Wenn man wie bei (II) vorgeht sollte „Montag“ oder „Mittwoch“ gewählt werden. Jedoch ist die Mehrheit der Wähler für „Dienstag“. Für „Dienstag“ spricht auch, dass in einer verallgemeinerten Situation obige Fairnessforderung mehr als die Hälfte der Wählerstimmen ignoriert.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Plurality, Borda, k-Approval, Veto

Gegeben sei die Wahl (C, V) mit der Kandidatenmenge $C = \{a, b, c, d, e\}$ und sechs Wählern in der Wählermenge V mit den folgenden Präferenzen:

$$\begin{array}{lccccc}
\text{Wähler } v_1: & d & c & a & e & b \\
\text{Wähler } v_2: & d & c & b & a & e \\
\text{Wähler } v_3: & d & b & e & a & c \\
\text{Wähler } v_4: & e & c & b & a & d \\
\text{Wähler } v_5: & b & c & a & d & e \\
\text{Wähler } v_6: & a & c & b & d & e
\end{array}$$

Bestimmen Sie in dieser Wahl den oder die Plurality-Gewinner, Borda-Gewinner, 3-Approval-Gewinner und Veto-Gewinner. Geben Sie dabei die jeweiligen Punkte der Kandidaten an.

Lösungsvorschlag: Punktwerte in den verschiedenen Wahlsystemen für die Kandidaten:

	a	b	c	d	e	Gewinner
PV	1	1	0	3	1	d
3-AV	3	5	5	3	2	b,c
Veto	6	5	5	5	3	a
Borda	11	13	15	14	7	c

Aufgabe 3 (12 Punkte): Plurality- und Veto-Gewinner

(a) Sei $C = \{a, b, c, d, e\}$ eine Menge von Kandidaten und V eine Menge mit 4 Wählern. Geben Sie Präferenzen für die Wähler in V an, sodass *nur* a und b Plurality- und Veto-Gewinner der Wahl (C, V) sind.

(b) Sei nun C eine Menge von $m \geq 3$ Kandidaten und V eine Menge von $n > 0$ Wählern. Sei $C' = \{a, b\} \subseteq C$. Zeigen Sie die folgende Aussage.

Es gibt Präferenzen für V, sodass *nur* die Kandidaten in C' Plurality-Gewinner der Wahl (C, V) sind genau dann, wenn $n = 2$ oder $n \geq 4$.

(c) Gilt die Aussage auch für Veto? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

(a) **(3 Punkte)** Das folgende Präferenzprofil ergibt den gewünschten Wahlausgang.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Wähler}\, v_1: & a & b & d & e & c \\ \text{Wähler}\, v_2: & a & b & c & e & d \\ \text{Wähler}\, v_3: & b & a & c & d & e \\ \text{Wähler}\, v_4: & b & a & d & e & c \end{array}$$

(b) **(7 Punkte)** Für diese Aufgabe bedeutet die Formulierung "Wähler v_j stimmt für Kandidat c_i", dass Wähler v_j eine Präferenz $c_i\ \ldots$ hat. Da wird nur Plurality Wahlen betrachten, ist die Reihenfolge der Kandidaten nach dem Kandidaten auf der ersten Position egal.

Wir zeigen, die Aussage per Fallunterscheidung und zeigen für jeden Fall, ob es eine Wahl gibt bei der nur a oder b (Plurality-)Gewinner sind.

$n = 1$: Der Wähler kann nur für einen Kandidaten stimmen, also ist entweder nur einer von a und b Gewinner oder keiner.

$n = 2$: Der erste Wähler stimmt für a und der zweite für b. Dann haben beide Kandidaten einen Punkt und alle anderen keine.

$n = 3$: a und b können nur gleich viele Punkt haben falls (1) keiner der Wähler für sie stimmt oder (2) nur ein Wähler jeweils für sie stimmt. In (1) gewinnen sie nicht und in (2) gewinnt noch ein dritter Kandidat mit ihnen.

$n = 2i$: (wobei $i \geq 2$) Die eine Hälfte der Wähler stimmt für a und die andere für b. Alle anderen Kandidaten bekommen also keine Punkte und a und b haben gleich viele.

$n = 2i + 1$: (wobei $i \geq 2$) Ein Wähler stimmt für einen Kandidaten $c' \in C \setminus \{a, b\}$ und die restlichen $2i$ Wähler wie im Fall "$n = 2i$". a und b bekommen $i \geq 2$ Punkte, c' bekommt einen Punkt und alle anderen gar keine.

(c) **(2 Punkte)** Nein, die Aussage gilt nicht für Veto, da die linke Seite der Aussage davon abhängt wie viele Kandidaten es gibt und ob genug Wähler zur Verfügung stehen, die auf diese Kandidaten Vetos verteilen können.

Gegenbeispiel: Für $n = 2$ und $m = 6$ gibt es immer mindestens 4 Veto-Gewinner.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Borda Count

Sei C eine Menge von m Kandidaten und v ein Wähler. Bezeichne für einen Kandidaten $c \in C$ mit $\text{Score}_v^{\text{Borda}}(c)$ die Punkte, die c vom Wähler v unter der Borda Wahlregel bekommen würde. Steht c auf Position i in der Präferenz von Wähler v, würde c nach der Definition aus der Vorlesung also $\text{Score}_v^{\text{Borda}}(c) = m - i$ Punkte bekommen. In einer alternativen Definition der Borda Wahlregel, im folgenden bezeichnet als Borda', werden

Punkte wie folgt vergeben:

$$\mathrm{Score}_v^{\mathrm{Borda}'}(c) = |\{d \in C \mid c > d \text{ in der Präferenz von } v\}|.$$

Zeigen Sie, dass Borda und Borda$'$ äquivalent sind, also dass für jede Wahl (C, V) gilt

$$c \in C \text{ ist Borda-Gewinner in } (C, V) \Leftrightarrow c \in C \text{ ist Borda}'\text{-Gewinner in } (C, V).$$

Lösungsvorschlag: Falls $\mathrm{Score}_v^{\mathrm{Borda}}(c) = \mathrm{Score}_v^{\mathrm{Borda}'}(c)$ für beliebige Kandidaten c und Wähler v ist offensichtlich, dass die Borda-Gewinner von (C, V) auch Borda$'$-Gewinner von (C, V) sind und umgekehrt.
Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{Score}_v^{\mathrm{Borda}}(c) = \mathrm{Score}_v^{\mathrm{Borda}'}(c)$ für alle Kandidaten $c \in C$ und Wähler $v \in V$. Betrachte einen beliebigen Kandidaten c und Wähler v. Dann ist $\mathrm{Score}_v^{\mathrm{Borda}}(c) = m - i$ mit $1 \leq i \leq m$. Die Präferenz von v ist also

$$c_1 > \cdots > c_{i-1} > c > c_{i+1} > \cdots > c_m \text{ mit } c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_m \in C.$$

Dann ist $\mathrm{Score}_v^{\mathrm{Borda}'}(c) = |\{d \in C \mid c > d \text{ in der Präferenz von } v\}| = |\{c_{i+1}, \ldots, c_m\}| = |\{c_j \mid i + 1 \leq j \leq m\}| = m - i = \mathrm{Score}_v^{\mathrm{Borda}}(c)$, was zu beweisen war.