

Übung zur Vorlesung Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Bearbeitungszeit: 12. Oktober bis 19. Oktober, 12:00 mittags
Verantwortlich: Marc Neveling

Aufgabe 1 (10 Punkte): Doodle-Umfrage

Gegeben seien folgende Doodle-Abstimmungen über einen passenden Tag zum Wandern. Dabei kann man einem Termin nur zustimmen (✓) oder ihn ablehnen (leer).

(I)

| | Mo | Di | Mi | Do | Fr |
|---|----|----|----|----|----|
| A | ✓ | | | ✓ | ✓ |
| B | | ✓ | ✓ | ✓ | |
| C | ✓ | | ✓ | ✓ | |
| D | | ✓ | | ✓ | ✓ |

(II)

| | Mo | Di | Mi | Do | Fr |
|---|----|----|----|----|----|
| A | | | ✓ | ✓ | ✓ |
| B | | ✓ | | | ✓ |
| C | ✓ | | | | |
| D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |

(III)

| | Mo | Di | Mi | Do | Fr |
|---|----|----|----|----|----|
| A | | ✓ | | ✓ | |
| B | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ |
| C | | ✓ | | | |
| D | ✓ | | ✓ | ✓ | |

- Bestimmen Sie die Kandidatenmenge für Doodle-Abstimmung (I) und geben Sie an, wie die Präferenzen der Wähler im Allgemeinen formal dargestellt werden können.
- Welcher Tag sollte jeweils ausgewählt werden? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Plurality, Borda, k-Approval, Veto

Gegeben sei die Wahl (C, V) mit der Kandidatenmenge $C = \{a, b, c, d, e\}$ und sechs Wählern in der Wählermenge V mit den folgenden Präferenzen:

- Wähler v_1 : $d \ c \ a \ e \ b$
 Wähler v_2 : $d \ c \ b \ a \ e$
 Wähler v_3 : $d \ b \ e \ a \ c$
 Wähler v_4 : $e \ c \ b \ a \ d$
 Wähler v_5 : $b \ c \ a \ d \ e$
 Wähler v_6 : $a \ c \ b \ d \ e$

Bestimmen Sie in dieser Wahl den oder die Plurality-Gewinner, Borda-Gewinner, 3-Approval-Gewinner und Veto-Gewinner. Geben Sie dabei die jeweiligen Punkte der Kandidaten an.

Aufgabe 3 (12 Punkte): Plurality- und Veto-Gewinner

- (a) Sei $C = \{a, b, c, d, e\}$ eine Menge von Kandidaten und V eine Menge mit 4 Wählern. Geben Sie Präferenzen für die Wähler in V an, sodass *nur* a und b Plurality- und Veto-Gewinner der Wahl (C, V) sind.
- (b) Sei nun C eine Menge von $m \geq 3$ Kandidaten und V eine Menge von $n > 0$ Wählern. Sei $C' = \{a, b\} \subseteq C$. Zeigen Sie die folgende Aussage.
Es gibt Präferenzen für V , sodass *nur* die Kandidaten in C' Plurality-Gewinner der Wahl (C, V) sind genau dann, wenn $n = 2$ oder $n \geq 4$.
- (c) Gilt die Aussage auch für Veto? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Borda Count

Sei C eine Menge von m Kandidaten und v ein Wähler. Bezeichne für einen Kandidaten $c \in C$ mit $\text{Score}_v^{\text{Borda}}(c)$ die Punkte, die c vom Wähler v unter der Borda Wahlregel bekommen würde. Steht c auf Position i in der Präferenz von Wähler v , würde c nach der Definition aus der Vorlesung also $\text{Score}_v^{\text{Borda}}(c) = m - i$ Punkte bekommen. In einer alternativen Definition der Borda Wahlregel, im folgenden bezeichnet als Borda', werden Punkte wie folgt vergeben:

$$\text{Score}_v^{\text{Borda}'}(c) = |\{d \in C \mid c > d \text{ in der Präferenz von } v\}|.$$

Zeigen Sie, dass Borda und Borda' äquivalent sind, also dass für jede Wahl (C, V) gilt

$$c \in C \text{ ist Borda-Gewinner in } (C, V) \Leftrightarrow c \in C \text{ ist Borda'-Gewinner in } (C, V).$$