

Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: O2, Raum: 26
Tel.: +49 211 8112188, Fax: +49 211 8111667
E-Mail: rothe@hhu.de

Vorlesung im Wintersemester 2021/22

Präferenzaggregation durch Wählen: Algorithmik und Komplexität

Probeklausurtermin: 11. Januar 2022

**BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!
TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN, VORNAMEN
UND IHRE MATRIKELNUMMER SOWIE ZUSÄTZLICH AUF DEM
DECKBLATT STUDIENFACH MIT SEMESTER UND ANZAHL DER
ABGEGEBENEN BLÄTTER EIN, UND UNTERSCHREIBEN SIE
ALS STUDIERENDE/R DER INFORMATIK, DASS SIE ANGEMELDET SIND!**

- ▶ **Nachname, Vorname:**
- ▶ **Studienfach, Fachsemester:**
- ▶ **Matrikelnummer:**
- ▶ **(Nur für Studierende der Informatik) Hiermit bestätige ich, dass ich mich beim akademischen Prüfungsamt für diese Klausur angemeldet habe:**

Unterschrift

- ▶ **Anzahl der abgegebenen Blätter, inklusive der 6 Aufgabenblätter:**

Erlaubte Hilfsmittel: Alle Materialien in Papierform, insbesondere handgeschriebene oder gedruckte Notizen, Bücher, Vorlesungsfolien (ausgedruckt), Übungszettel und Lösungen, und nicht-programmierbare Taschenrechner.

In der Klausur nicht erlaubte Hilfsmittel: Elektronische Geräte aller Art außer nicht-programmierbare Taschenrechner.

Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
erreichbare Punktzahl	20	30	15	10	25	100
erreichte Punktzahl						

Aufgabe 1 (20 Punkte) *Ankreuzaufgaben***/20 Punkte**

Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder „Ja“ oder „Nein“ an.

Bewertung: Bezeichnet $\#R$ die Anzahl der richtig angekreuzten Antworten und $\#K$ die Anzahl der insgesamt angekreuzten Antworten (d. h. nur solche, bei denen *entweder* „Ja“ *oder* „Nein“ angekreuzt wurde – Antworten, bei denen weder „Ja“ noch „Nein“ oder sowohl „Ja“ als auch „Nein“ angekreuzt wurde, zählen nicht zu $\#K$), so ergibt sich die folgende Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe:

$$\#R + \left\lfloor \frac{5 \cdot \#R}{\#K} \right\rfloor \text{ Punkte, falls } \#K > 0, \text{ und } 0 \text{ Punkte, falls } \#K = 0.$$

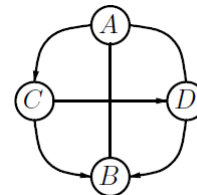
(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Die Wähler einer Borda-Wahl geben ihre Präferenzen als lineare Ordnungen auf der Kandidatenmenge an.
- ☐ Ja ☐ Nein $(3, 4, 2, 1, 0)$ ist ein Scoring-Vektor.
- ☐ Ja ☐ Nein Kann man ein Problem A in Polynomialzeit auf ein Problem $B \in P$ reduzieren, so ist auch A in P .

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Das Wahlsystem von Borda ist monoton.
- ☐ Ja ☐ Nein STV erfüllt das Condorcet-Kriterium.
- ☐ Ja ☐ Nein Dodgson-Wahlen sind homogen.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr für eine Copeland-Wahl mit dem folgenden Mehrheitsgraphen?



- ☐ Ja ☐ Nein A gewinnt.
- ☐ Ja ☐ Nein C gewinnt.
- ☐ Ja ☐ Nein D gewinnt.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Wenn ein Wahlsystem immun gegen einen Kontrolltypen ist, so ist das zugehörige Kontrollproblem in P .
- ☐ Ja ☐ Nein Wenn ein Condorcet-Gewinner einer Wahl existiert, so ist er eindeutig.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede Approval-Wahl hat höchstens einen Gewinner.

(e) Gegeben sei eine Wahl mit vier Kandidaten ($C = \{a, b, c, d\}$) und vier Wählern in V . Zwei der Wähler stimmen mit $c a b d$ ab, einer mit $a d b c$ und einer mit $b d a c$. Es ist möglich, C so in C_1 und C_2 zu zerlegen, dass c kein eindeutiger Pluralitätsgewinner mehr ist, wenn im TP-Modell die Pluralitätsgewinner von (C_1, V) und (C_2, V) gegeneinander antreten. Welche der folgenden Begründungen für diese Behauptung ist/sind korrekt?

- ☐ Ja ☐ Nein Dies gelingt mit der Zerlegung $C_1 = \{a, b, c\}$ und $C_2 = \{d\}$.
- ☐ Ja ☐ Nein Dies gelingt mit der Zerlegung $C_1 = \{a, c\}$ und $C_2 = \{b, d\}$.
- ☐ Ja ☐ Nein Dies gelingt mit der Zerlegung $C_1 = \{a, d\}$ und $C_2 = \{b, c\}$.

Name:

Matrikelnummer:

4

Aufgabe 2 (30 Punkte)

/30 Punkte

(a) Gegeben sei die Wahl (C, V) mit $C = \{a, b, c, d\}$ und $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$:

$v_1 : a \quad b \quad d \quad c$
 $v_2 : a \quad c \quad d \quad b$
 $v_3 : b \quad a \quad d \quad c$
 $v_4 : c \quad d \quad a \quad b$
 $v_5 : c \quad d \quad a \quad b$
 $v_6 : d \quad b \quad c \quad a$

(i) Bestimmen Sie den Veto-Score aller Kandidaten und markieren (Ja $\hat{=}$ ✓, Nein $\hat{=}$ ✗) Sie für jeden Kandidaten, ob dieser ein Veto-Gewinner der Wahl (C, V) ist.

Kandidat	Veto-Score	Veto-Gewinner?
a		
b		
c		
d		

(ii) Bestimmen Sie den Borda-Score aller Kandidaten und markieren (Ja $\hat{=}$ ✓, Nein $\hat{=}$ ✗) Sie für jeden Kandidaten, ob dieser ein Borda-Gewinner der Wahl (C, V) ist.

Kandidat	Borda-Score	Borda-Gewinner?
a		
b		
c		
d		

(iii) Bestimmen Sie die Ausgänge der paarweisen Vergleiche $N(i, j)$, berechnen Sie den Maximin-Score und markieren (Ja $\hat{=}$ ✓, Nein $\hat{=}$ ✗) Sie für jeden Kandidaten, ob dieser ein Maximin-Gewinner der Wahl (C, V) ist.

$i \backslash j$	a	b	c	d	MScore	Maximin-Gewinner?
a	—					
b		—				
c			—			
d				—		

(b) Fassen Sie das Borda-Wahlsystem als social welfare function f auf, bei der Kandidaten anhand des Borda-Scores sortiert werden (d.h., $x \succ y$ wenn $score(x) > score(y)$ und $x \sim y$ wenn die scores gleich sind). Gegeben sei die Wahl (C, V) mit $C = \{a, b, c, d, e\}$ und $V = (v_1, v_2, v_3)$.

Name:

Matrikelnummer:

5

- (i) Bestimmen Sie Präferenzen für v_i , $1 \leq i \leq 3$, sodass $f(C, V)$ das folgende Ranking ausgibt:
 $c \succ a \succ b \sim e \succ d$.
- (ii) Geben Sie alle Borda-Scores der Kandidaten an, um die Korrektheit ihres Rankings zu beweisen.
- (c) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass Veto nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen ist. Begründen Sie, warum ihr Beispiel tatsächlich ein Gegenbeispiel ist.

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)

Name:

Matrikelnummer:

6

Name:

Matrikelnummer:

7

Aufgabe 3 (15 Punkte)

/15 Punkte

Gegeben sei die Condorcet-Wahl (C, V) mit $C = \{u, w, x, y, z\}$ und $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$:

$v_1 : u \quad w \quad y \quad x \quad z$
 $v_2 : u \quad x \quad w \quad z \quad y$
 $v_3 : x \quad w \quad z \quad u \quad y$
 $v_4 : x \quad y \quad u \quad z \quad w$
 $v_5 : y \quad x \quad w \quad z \quad u$

Sei x der ausgezeichnete Kandidat. Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus aus der Vorlesung Schritt für Schritt eine destruktive Kontrollaktion durch Partitionierung der Wähler. Vervollständigen Sie dazu auch folgende Tabelle und geben Sie **alle** Schritte des Algorithmus an.

(a, b)	W_x	L_x	S_a	S_b	Erfolgreich?
(u, w)					
(u, y)					
(u, z)					
(w, y)					
(w, z)					
(y, z)					

Name:

Matrikelnummer:

8

Name:

Matrikelnummer:

9

Aufgabe 4 (10 Punkte)

/10 Punkte

Eine resolute social choice function f erfüllt Monotonie, wenn für jede Wahl (C, V) und Wahl (C, V') , die aus (C, V) durch Vertauschung der Position des Gewinners $f(C, V)$ mit der Position des höher platzierten benachbarten Kandidaten in der Präferenz eines Wählers v_i hervorgeht,

$$f(C, V) = f(C, V')$$

gilt.

Eine resolute social choice function f erfüllt Down-Monotonie, wenn für jede Wahl (C, V) und Wahl (C, V') , die aus (C, V) durch Vertauschung der Position eines Verlierers $b \neq f(C, V)$ mit der Position des niedriger platzierten benachbarten Kandidaten in der Präferenz eines Wählers v_i hervorgeht,

$$f(C, V) = f(C, V')$$

gilt.

Zeigen Sie, dass jede resolute social choice function f , die Down-Monotonie erfüllt, auch Monotonie erfüllt.

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)

Name:

Matrikelnummer:

10

Aufgabe 5 (25 Punkte)

/25 Punkte

EXACT COVER BY THREE SETS (X3C)

Gegeben: Eine Menge $B = \{b_1, \dots, b_{3m}\}$, wobei $m \geq 4$, und eine Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ mit $\|S_i\| = 3$ und $S_i \subseteq B$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$.

Frage: Gibt es eine Teilmenge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ derart, dass jedes Element aus B in genau einer der Teilmengen aus $\mathcal{S}'$ enthalten ist?

CONDORCET-CONSTRUCTIVE CONTROL BY ADDING VOTERS (CONDORCET-CCAV)

Gegeben: Eine Kandidatenmenge C , eine Liste V von registrierten Wählern mit Stimmen über C , eine Liste W von unregistrierten Wählern mit Stimmen über C , ein ausgezeichneter Kandidat $p \in C$ und eine nichtnegative ganze Zahl k .

Frage: Gibt es eine Teilliste W' von W der Größe höchstens k , so dass p der Condorcet-Gewinner der Wahl $(C, V \cup W')$ ist?

Für eine polynomialzeit-beschränkte Many-one-Reduktion f wird aus einer X3C-Instanz $(B, \mathcal{S})$ eine Condorcet-CCAV-Instanz wie folgt konstruiert.

- Die Kandidatenmenge sei $C = \{c\} \cup B$ wobei $c \notin B$ der ausgezeichnete Kandidat sein soll.
- Die Liste V der registrierten Wähler sei $V = (v_1, \dots, v_s)$ mit $s = m - 3$.
- Die Liste W der unregistrierten Wähler sei $W = (w_1, \dots, w_t)$ mit $t = n$.
- Setze $k = m$ und die Stimmen in V und W wie folgt:

(1)	Für $1 \leq i \leq m - 3$ sei die Präferenz von v_i :	$b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{3m} \ c$
(2)	Für $1 \leq j \leq n$, wobei $S_j = \{b_x, b_y, b_z\}$, sei die Präferenz von w_j :	$b_x \ b_y \ b_z \ c \ \dots$

- (a) Gegeben sei $(B, \mathcal{S})$ mit $B = \{1, \dots, 12\}$ und $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_8\}$ mit $S_1 = \{1, 3, 5\}$, $S_2 = \{1, 4, 6\}$, $S_3 = \{5, 10, 12\}$, $S_4 = \{8, 9, 11\}$, $S_5 = \{2, 4, 6\}$, $S_6 = \{7, 10, 12\}$, $S_7 = \{3, 7, 12\}$, $S_8 = \{2, 8, 9\}$.

Ist $(B, \mathcal{S})$ eine Ja- oder Nein-Instanz für X3C? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (b) Wenden Sie die Reduktion auf die X3C-Instanz von (a) an. Geben Sie die resultierende Instanz vollständig an.
- (c) Bestimmen Sie $N(c, i)$, $1 \leq i \leq 12$, in der resultierenden Wahl von (b). Ist c ein Condorcet-Gewinner? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Geben Sie eine Teilliste W' der Wähler aus W an, die hinzugefügt werden müssen, damit c ein Condorcet-Gewinner in der resultierenden Wahl von (b) wird. Bestimmen Sie dabei $N(c, i)$, $1 \leq i \leq 12$, in der neuen Wahl. Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.
- (e) Zeigen Sie für alle möglichen X3C-Instanzen $(B, \mathcal{S})$:

$$(B, \mathcal{S}) \in \text{X3C} \implies f(B, \mathcal{S}) \in \text{Condorcet-CCAV}.$$

- (f) Zeigen Sie für alle möglichen X3C-Instanzen $(B, \mathcal{S})$:

$$f(B, \mathcal{S}) \in \text{Condorcet-CCAV} \implies (B, \mathcal{S}) \in \text{X3C}.$$

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)

Name:

Matrikelnummer:

12