Prof. Dr. J. Rothe

Düsseldorf, 08.11.2022

Übung zur Vorlesung
Algorithmische Spieltheorie

Blatt 5

Besprechung: 16. bis 18.11.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Wizard-Varianten

Im Folgenden werden zwei vereinfachte Varianten des Kartenspiels Wizard[1] betrachtet. Hierbei bekommen zwei Spieler zunächst eine bestimmte Anzahl an Karten. Das Spiel verläuft in Runden—in jeder Runde legen die Spieler nacheinander je eine Karte ab. Derjenige Spieler, der die in einer Runde wertvollste Karte ablegt, bekommt den sogenannten *Stich* (bestehend aus allen abgelegten Karten dieser Runde). Derjenige Spieler, der einen Stich bekommt, beginnt die nächste Runde. Ziel des Spiels ist es, die Anzahl an Stichen, die man bekommt, korrekt vorherzusagen. Das Spiel endet, wenn alle Karten abgelegt wurden. Wir gehen davon aus, dass beide Spieler risikoneutral sind.

(a) In der ersten Variante gelten folgende Regeln:

- Es gibt drei Karten, auf denen die Werte 1, 2 und 3 stehen.
- Jeder Spieler erhält eine Karte (es wird also nur eine Runde gespielt).
- Jeder Spieler zeigt seine Karte dem Gegner, ohne sie selbst zu sehen.
- Spieler 1 sagt vorher, ob er den Stich bekommt oder nicht.
- Danach sagt Spieler 2 vorher, ob er den Stich bekommt oder nicht.
- Daraufhin legen beide Spieler ihre Karte auf den Tisch.
- Der Spieler, der die Karte mit der größeren Zahl gespielt hat, gewinnt den Stich.
- Wenn ein Spieler richtig vorhergesagt hat, ob er den Stich bekommt, erhält er den Gewinn 1, sonst erhält er den Gewinn 0.

(i) Zeichnen Sie den Spielbaum für dieses Spiel (wie den für die Poker-Variante aus der Vorlesung) und geben Sie für jeden Teilbaum an, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieser eintritt bzw. von rationalen Spielern gespielt wird.
Teilbäume, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0 gespielt werden, dürfen hierbei weggelassen werden!

(ii) Gibt es einen Spieler, der einen Vorteil gegenüber dem anderen Spieler hat?
Gibt es einen Spieler, für den es sich lohnen würde zu bluffen?
Haben die Spieler in dieser Spielvariante perfekte Information?

[1] K. Fisher, 1984; F. Vohwinkel, AMIGO Spiel + Freizeit GmbH, 1996

(iii) Erläutern Sie knapp, was sich ändern würde, wenn beide Spieler gleichzeitig ihren Tipp abgeben würden; oder wenn beide mit offenen Karten spielen würden.

(b) In der zweiten Variante gelten folgende Regeln:

- Es gibt vier Karten mit zwei unterschiedlichen Farben: eine rote 1, eine rote 2, eine blaue 1 und eine blaue 2.
- Wieder erhält jeder Spieler eine Karte und der Spielablauf ist der gleiche wie in Aufgabenteil (a). Allerdings spielt es jetzt eine Rolle, dass Spieler 1 zuerst seine Karte ablegt, da seine Karte die Farbe des Stichs bestimmt. Hat Spieler 2 die gleiche Farbe wie Spieler 1, bekommt der Spieler mit dem höheren Kartenwert den Stich, ansonsten bekommt Spieler 1 den Stich.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler 1? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler 2? Begründen Sie jeweils detailliert Ihre Antwort.

(ii) Gibt es hier einen Spieler, für den es sich lohnen würde zu bluffen? Haben die Spieler in dieser Spielvariante perfekte Information?

Aufgabe 2: Bayes'sche Spiele

Gegeben sei das folgende Kartenspiel für zwei Spieler:

- Es gibt vier Karten, je eine mit Zahlenwert 1, 2, 3 und 4.
- Zu Beginn zieht jeder Spieler eine Karte vom gemischten Stapel. Jeder Spieler sieht die eigene Karte, aber nicht die des Gegners.
- Nun muss Spieler 1 voraussagen, was die absolute Differenz der Zahlenwerte der beiden Spielerkarten ist. Für ein richtiges Voraussagen von "1" erhält er den Gewinn 2, für "2" den Gewinn 3, und für "3" den Gewinn 6. Bei einer falschen Voraussage ist der Gewinn 0.
- Spieler 2 hat nun die Gelegenheit, die Voraussage von Spieler 1 zu stehlen. Tut er dies, so erhält Spieler 1 stattdessen einen Gewinn von 1 (unabhängig von der Voraussage) und Spieler 2 erhält den Gewinn der Voraussage wie oben beschrieben. Stiehlt Spieler 2 nicht, sondern passt stattdessen, so sind die Rollen vertauscht—Spieler 2 erhält einen Wert von 1, und Spieler 1 behält seine Voraussage.
- Schließlich werden die Karten aufgedeckt und die Gewinne ausgezahlt.

(a) Nehmen Sie an, dass Spieler 1 die Karte 1 zieht und Spieler 2 die Karte 4. Geben Sie für diesen Fall ein Zwei-Personen-Spiel in Normalform an, mit der Spielermenge $P = \{1, 2\}$, den Strategien $S_1 = \{1, 2, 3\}$ und $S_2 = \{steal, pass\}$, und den oben beschriebenen Gewinnen.

(b) Bezeichne mit D_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ das Ereignis, dass die absolute Differenz der Zahlenwerte der gezogenen Karten i ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(D_1)$, $P(D_2)$ und $P(D_3)$.

(c) Bezeichne mit H_k, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ das Ereignis, dass Spieler 2 die Karte mit Wert k gezogen hat. Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(D_i|H_k)$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und alle $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(d) Angenommen, Spieler 2 hat die Karte 1 auf der Hand (Ereignis H_1). Berechnen Sie für alle reinen Strategien $s_1 \in \{1, 2, 3\}$ von Spieler 1 die beste Antwort in gemischten Strategien von Spieler 2. Was ist jeweils der erwartete Gewinn für Spieler 2? Begründen Sie, warum die Ergebnisse gleich sind, wenn man H_4 statt H_1 betrachtet.

Aufgabe 3: Nullsummenspiele, Minimax-Theorem

(a) Wandeln Sie das folgende Zwei-Personen-Spiel mit Gewinnfunktionen g_1, g_2 nach der aus der Vorlesung bekannten Methode (siehe Kaptiel 5, Folie 19) aus der Sicht von beiden Spielern 1 und 2 jeweils in ein Nullsummenspiel mit Gewinnfunktionen g_1', g_2' bzw. g_1'', g_2'' um, wobei $g_1 \equiv g_1'$ bzw. $g_2 \equiv g_2''$.

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(1, 2)$	$(-2, 2)$
	b	$(-4, 0)$	$(2, -3)$

(b) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien aller drei Spiele. Warum können die erzeugten Nullsummenspiele verwendet werden, um den MinMax-Wert oder den MaxMin-Wert der Spieler im ursprünglichen Spiel zu bestimmen, obwohl die gemischten Nash-Gleichgewichte der Spiele nicht übereinstimmen? Steht das nicht im Widerspruch zum Minimax-Theorem?