Informatik IV

Theoretische Informatik

Kapitel 2

Reguläre Sprachen

Sommersemester 2019

Dozent: Prof. Dr. J. Rothe

Beispiel 1

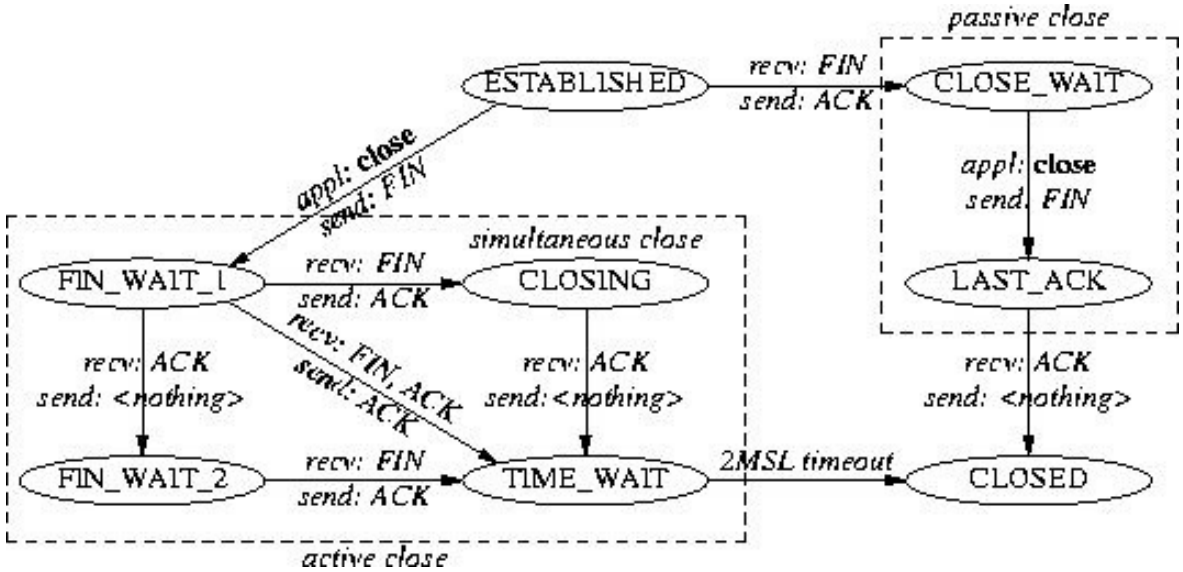


Abbildung: TCP

Beispiel 2

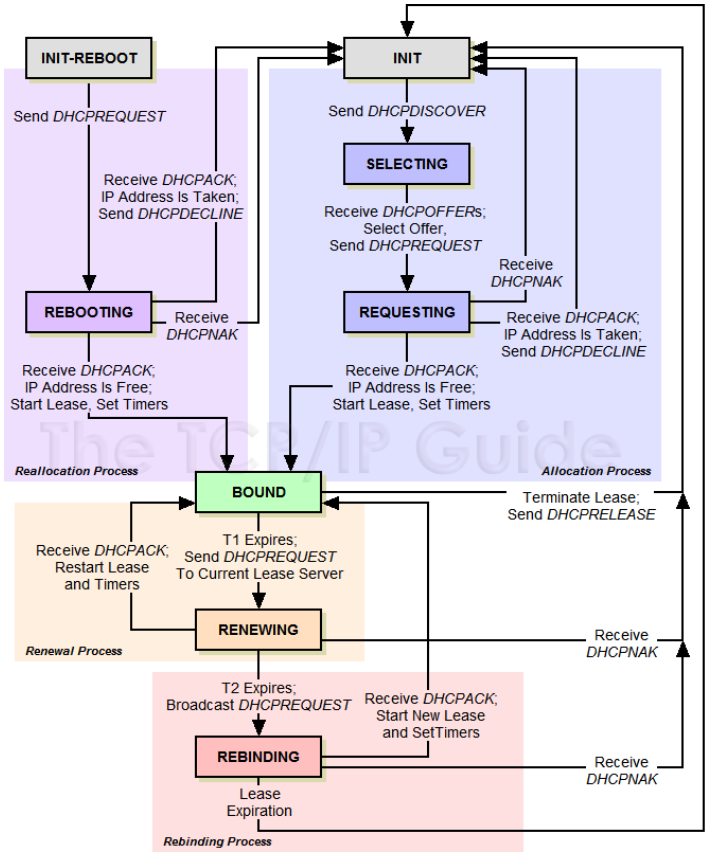


Abbildung: DHCP

Endliche Automaten

Definition

Ein *deterministischer endlicher Automat* (kurz DFA für *"deterministic finite automaton"*) ist ein Quintupel $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$, wobei

- Σ ein Alphabet ist,
- Z eine endliche Menge von Zuständen mit $\Sigma \cap Z = \emptyset$,
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ die Überführungsfunktion,
- $z_0 \in Z$ der Startzustand und
- $F \subseteq Z$ die Menge der Endzustände (Finalzustände).

Bemerkung: Wir erlauben auch partiell definierte Überführungsfunktionen. Durch Hinzunahme eines weiteren Zustandes kann man solche Funktionen leicht total definieren.

Endliche Automaten

Beispiel: Ein Beispiel für einen DFA ist $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ mit

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{0, 1\} \\ Z &= \{z_0, z_1, z_2, z_3\} \\ F &= \{z_2\} \end{aligned}$$

δ :

δ	z_0	z_1	z_2	z_3
0	z_1	z_3	z_2	z_3
1	z_3	z_2	z_2	z_3

Arbeitsweise eines DFAs

Ein DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ akzeptiert bzw. verwirft eine Eingabe x wie folgt:

- M beginnt beim Anfangszustand z_0 und führt insgesamt $|x|$ Schritte aus.
- Der Lesekopf wandert dabei v.l.n.r. über das Eingabewort x, Symbol für Symbol, und ändert dabei seinen Zustand jeweils gemäß der Überführungsfunktion δ:
  Ist M im Zustand $z \in Z$ und liest das Symbol $a \in \Sigma$ und gilt $\delta(z, a) = z'$, so ändert M seinen Zustand in z'.
- Ist der letzte erreichte Zustand (nachdem x abgearbeitet ist)
  - ein Endzustand, so akzeptiert M die Eingabe x;
  - andernfalls lehnt M sie ab.

Arbeitsweise eines DFAs

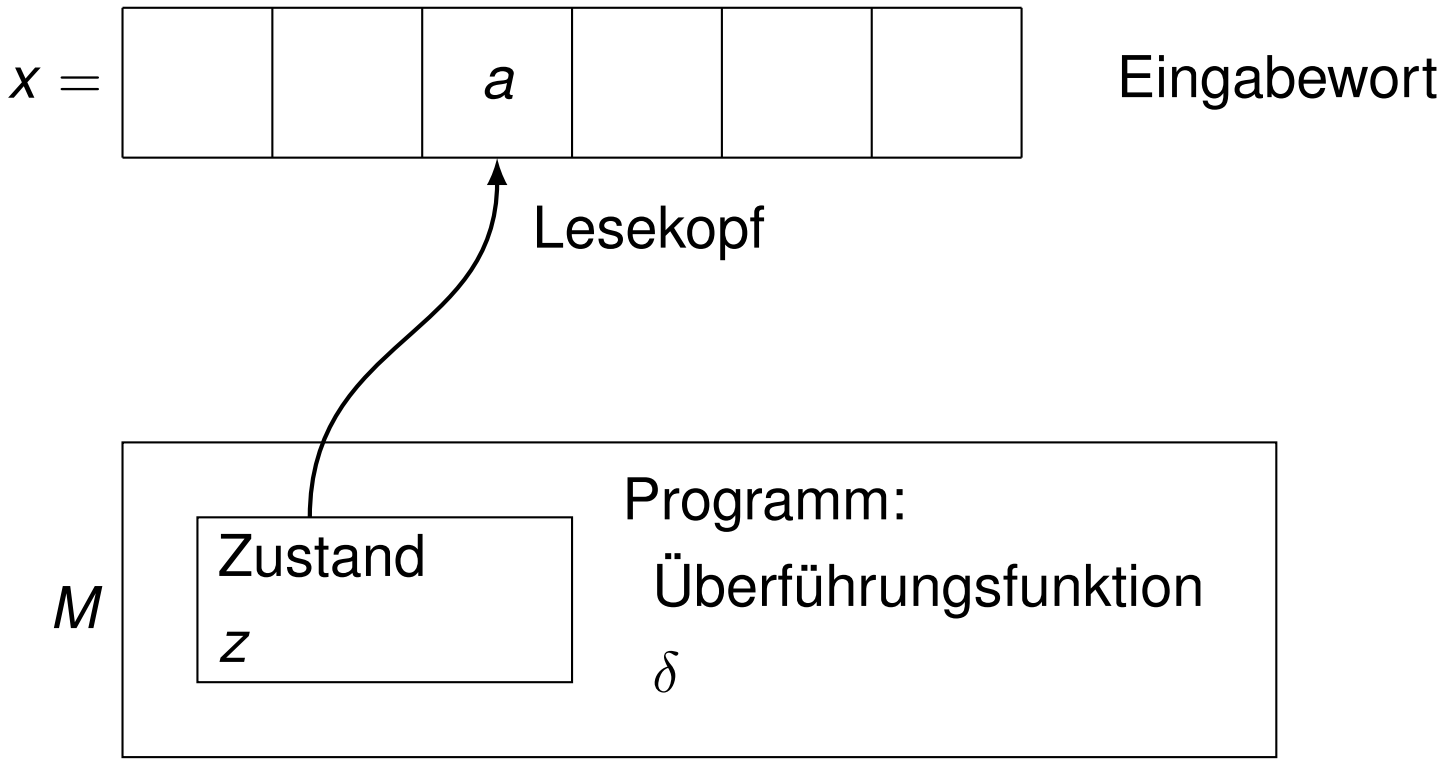


Abbildung: Arbeitsweise eines endlichen Automaten

Zustandsgraph eines DFAs

Ein DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ lässt sich anschaulich durch seinen *Zustandsgraphen* darstellen,

- dessen Knoten die Zustände von M und
- dessen Kanten Zustandsübergänge gemäß der Überführungsfunktion δ repräsentieren.
- Gilt $\delta(z, a) = z'$ für ein Symbol $a \in \Sigma$ und für zwei Zustände $z, z' \in Z$, so hat dieser Graph eine gerichtete Kante von z nach z', die mit a beschriftet ist.
- Der Startzustand wird durch einen Pfeil auf z_0 dargestellt.
- Endzustände sind durch einen Doppelkreis markiert.

Zustandsgraph eines DFAs

Beispiel:

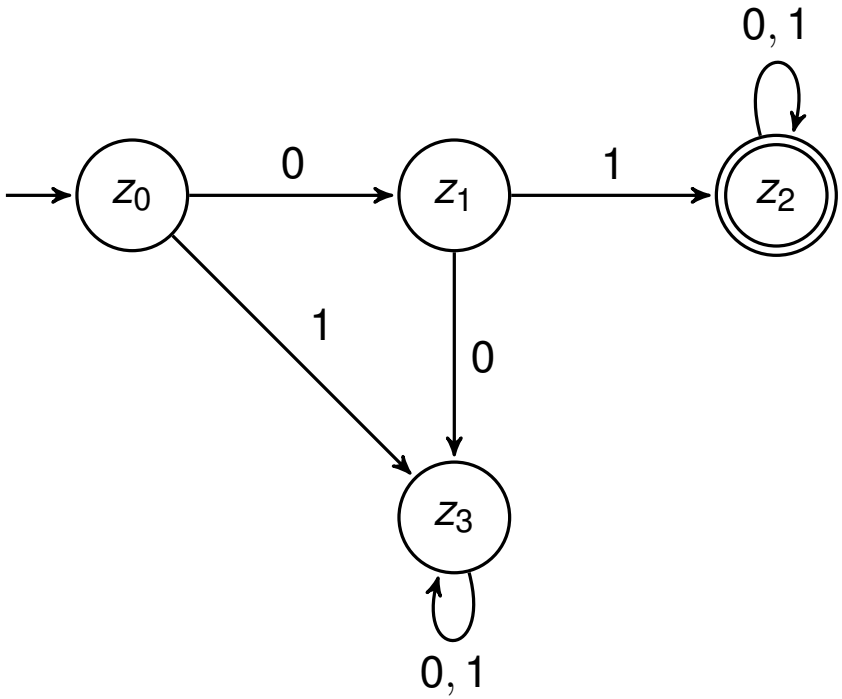


Abbildung: Zustandsgraph eines deterministischen endlichen Automaten

Sprache eines DFAs

Definition

Sei $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ ein DFA. Die *erweiterte Überführungsfunktion* $\widehat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$ von M ist induktiv definiert:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(z, \lambda) &= z \\ \widehat{\delta}(z, ax) &= \widehat{\delta}(\delta(z, a), x) \end{aligned}$$

für alle $z \in Z$, $a \in \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$.

Die *vom DFA M akzeptierte Sprache* ist definiert durch

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(z_0, w) \in F\}.$$

Sprache eines DFAs

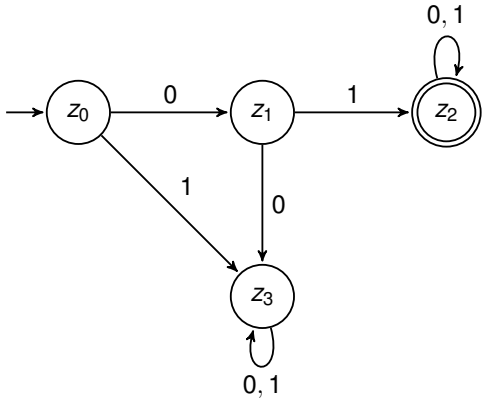
Bemerkung:

- Für $a \in \Sigma$ gilt $\widehat{\delta}(z, a) = \delta(z, a)$, und
- für $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ in Σ^* gilt:

$$\widehat{\delta}(z, x) = \delta(\cdots \delta(\delta(z, a_1), a_2) \cdots , a_n).$$

Sprache eines DFAs

Beispiel: Wie arbeitet der DFA aus der vorigen Abbildung:

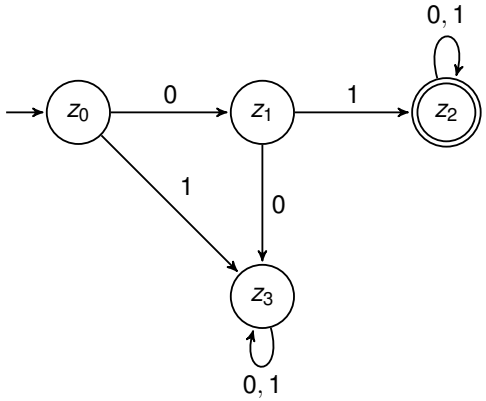


bei Eingabe von 0111?

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(z_0, 0111) &= \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, 0), 1), 1), 1) \\
&= \delta(\delta(\delta(z_1, 1), 1), 1) \\
&= \delta(\delta(z_2, 1), 1) \\
&= \delta(z_2, 1) \\
&= z_2 \qquad \in F.
\end{aligned}$$

Sprache eines DFAs

Beispiel: Wie arbeitet der DFA aus der vorigen Abbildung:

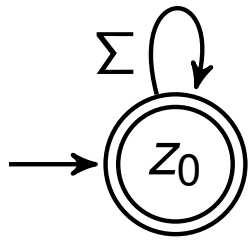
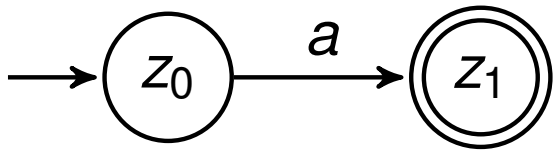


bei Eingabe von 0011?

$$
\begin{aligned}
\widehat{\delta}(z_0, 0011) &= \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, 0), 0), 1), 1) \\
&= \delta(\delta(\delta(z_1, 0), 1), 1) \\
&= \delta(\delta(z_3, 1), 1) \\
&= \delta(z_3, 1) \\
&= z_3 \qquad \notin F.
\end{aligned}
$$

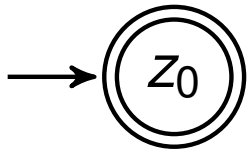
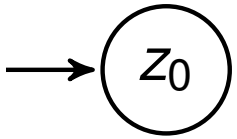
Sprache eines DFAs

Beispiel: Es sei Σ ein Alphabet.

L	DFA M mit $L(M) = L$
Σ^*	$(\Sigma, \{z_0\}, \{\delta(z_0, a) = z_0, a \in \Sigma\}, z_0, \{z_0\})$ 
$\{a\}, a \in \Sigma$	$(\Sigma, \{z_0, z_1\}, \{\delta(z_0, a) = z_1\}, z_0, \{z_1\})$ 

Sprache eines DFAs

Beispiel:

L	DFA M mit $L(M) = L$
$\{\lambda\}$	$(\Sigma, \{z_0\}, \emptyset, z_0, \{z_0\})$ 
$\emptyset$	$(\Sigma, \{z_0\}, \emptyset, z_0, \emptyset)$ 

DFAs und reguläre Grammatiken

Theorem

Jede von einem DFA akzeptierte Sprache ist regulär (d.h. vom Typ 3).

Beweis: Seien $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ ein DFA mit $L(M) = A$. Definiere eine reguläre Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$:

- $N = Z$,
- $S = z_0$,
- P besteht aus genau den folgenden Regeln:
  - Gilt $\delta(z, a) = z'$, so ist $z \to az'$ in P.
  - Ist dabei $z' \in F$, so ist zusätzlich $z \to a$ in P.
  - Ist $\lambda \in A$ (d.h., $z_0 \in F$), so ist auch $z_0 \to \lambda$ in P, und die bisher konstruierte Grammatik wird gemäß der Sonderregel für λ modifiziert.

DFAs und reguläre Grammatiken

Offenbar gilt $\lambda \in A \iff \lambda \in L(G)$.

Für alle $x = a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$ mit $n \geq 1$ gilt:

$x \in A \iff$ es gibt eine Zustandsfolge $z_0, z_1, \ldots, z_n$, so dass

z_0 Startzustand und $z_n \in F$ ist, und

$\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$ für jedes i, $1 \leq i \leq n$

$\iff$ es gibt eine Folge von Nichtterminalen $z_0, z_1, \ldots, z_n$ mit

$$S = z_0 \vdash a_1 z_1 \vdash a_1 a_2 z_2 \vdash \cdots$$

$$\cdots \vdash a_1 a_2 \cdots a_{n-1} z_{n-1} \vdash a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$$

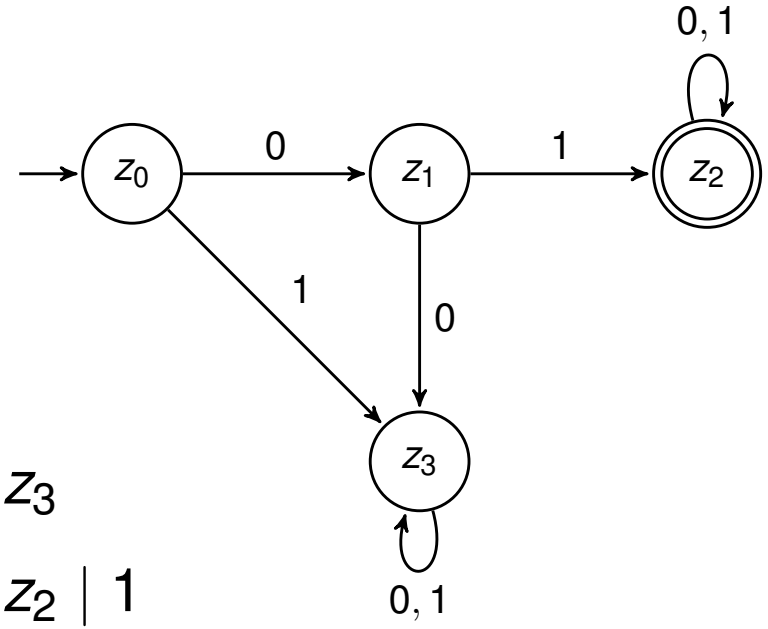
$\iff x \in L(G)$.

Somit ist $A = L(G)$. ❑

DFAs und reguläre Grammatiken

Beispiel: Reguläre Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ für diesen DFA:

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \{0, 1\} \\
N &= \{z_0, z_1, z_2, z_3\} \\
S &= z_0 \\
P &= \{ \quad z_0 \to 0z_1 \mid 1z_3 \\
&\qquad z_1 \to 0z_3 \mid 1z_2 \mid 1 \\
&\qquad z_2 \to 0z_2 \mid 1z_2 \mid 0 \mid 1 \\
&\qquad z_3 \to 0z_3 \mid 1z_3 \qquad \}
\end{aligned}
$$



Nichtdeterministischer endlicher Automat

Definition

Ein *nichtdeterministischer endlicher Automat* (kurz NFA) ist ein Quintupel $M = (\Sigma, Z, \delta, S, F)$, wobei

- Σ ein Alphabet ist,
- Z eine endliche Menge von Zuständen mit $\Sigma \cap Z = \emptyset$,
- $\delta : Z \times \Sigma \to \mathfrak{P}(Z)$ die Überführungsfunktion (hier: $\mathfrak{P}(Z)$ ist die Potenzmenge von Z, also die Menge aller Teilmengen von Z),
- $S \subseteq Z$ die Menge der Startzustände und
- $F \subseteq Z$ die Menge der Endzustände (Finalzustände).

Nichtdeterministischer endlicher Automat

Beispiel: Der folgende Automat M ist nichtdeterministisch (da $\|\delta(z_0, 1)\| = \|\{z_0, z_1\}\| = 2 > 1$).

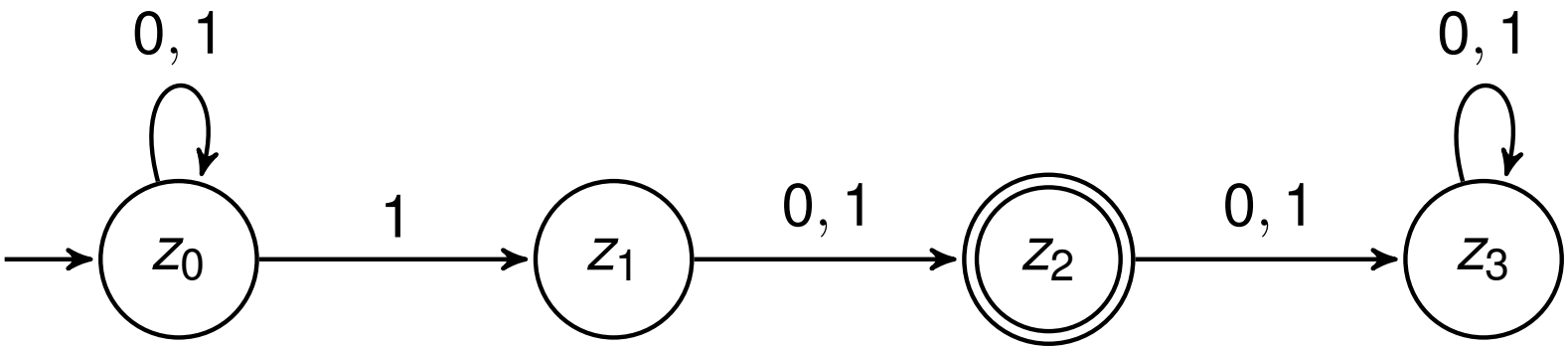


Abbildung: Ein nichtdeterministischer endlicher Automat

Sprache eines NFAs

Definition

Die *erweiterte Überführungsfunktion* $\widehat{\delta} : \mathfrak{P}(Z) \times \Sigma^* \to \mathfrak{P}(Z)$ von M ist induktiv definiert:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(Z', \lambda) &= Z' \\ \widehat{\delta}(Z', ax) &= \bigcup_{z \in Z'} \widehat{\delta}(\delta(z, a), x) \end{aligned}$$

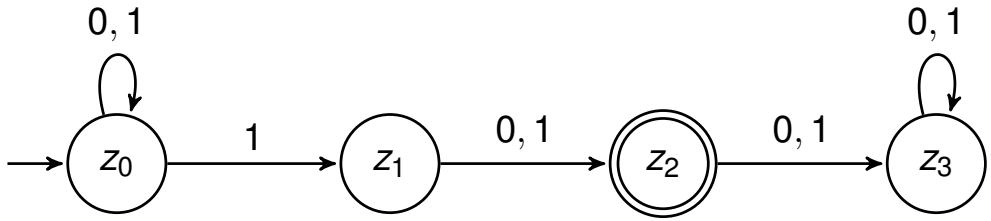
für alle $Z' \subseteq Z$, $a \in \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$.

Die *vom NFA M akzeptierte Sprache* ist definiert durch

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(S, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Sprache eines NFAs

Beispiel: NFA M

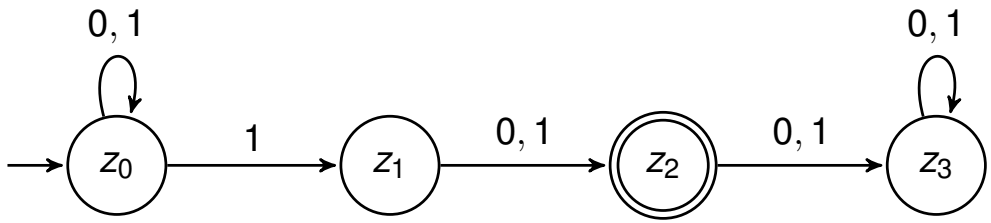


bei Eingabe von 0111:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\delta}(\{z_0\}, 0111) &= \widehat{\delta}(\delta(z_0, 0), 111) = \widehat{\delta}(\{z_0\}, 111) \\
&= \widehat{\delta}(\delta(z_0, 1), 11) = \widehat{\delta}(\{z_0, z_1\}, 11) \\
&= \widehat{\delta}(\delta(z_0, 1), 1) \cup \widehat{\delta}(\delta(z_1, 1), 1) \\
&= \widehat{\delta}(\{z_0, z_1\}, 1) \cup \widehat{\delta}(\{z_2\}, 1) \\
&= (\widehat{\delta}(\delta(z_0, 1), \lambda) \cup \widehat{\delta}(\delta(z_1, 1), \lambda)) \cup \widehat{\delta}(\delta(z_2, 1), \lambda) \\
&= (\widehat{\delta}(\{z_0, z_1\}, \lambda) \cup \widehat{\delta}(\{z_2\}, \lambda)) \cup \widehat{\delta}(\{z_3\}, \lambda) \\
&= \{z_0, z_1\} \cup \{z_2\} \cup \{z_3\}.
\end{aligned}
$$

Sprache eines NFAs

Beispiel: NFA M

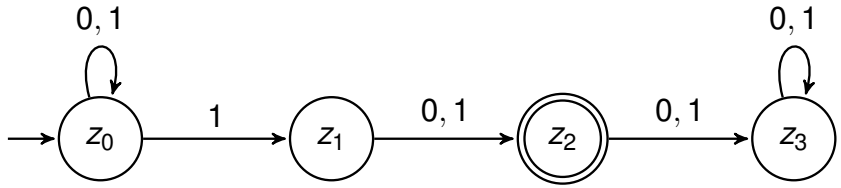


bei Eingabe von 0111:

$$\Longrightarrow \quad \widehat{\delta}(\{z_0\}, 0111) \cap \{z_2\} = (\{z_0, z_1\} \cup \{z_2\} \cup \{z_3\}) \cap \{z_2\} \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow \quad 0111 \in L(M).$$

Sprache eines NFAs

Beispiel: NFA M 

bei Eingabe von 01:

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(\{z_0\}, 01) &= \widehat{\delta}(\delta(z_0, 0), 1) \\
&= \widehat{\delta}(\{z_0\}, 1) \\
&= \widehat{\delta}(\delta(z_0, 1), \lambda) \\
&= \widehat{\delta}(\{z_0, z_1\}, \lambda) \\
&= \{z_0, z_1\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \widehat{\delta}(\{z_0\}, 01) \cap \{z_2\} = \{z_0, z_1\} \cap \{z_2\} = \emptyset \\
&\Longrightarrow \quad 01 \notin L(M).
\end{aligned}$$

$$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = u1v \text{ mit } u \in \{0,1\}^* \text{ und } v \in \{0,1\}\}.$$

DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott

Theorem (Rabin und Scott)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache kann auch von einem DFA akzeptiert werden.

Beweis: Sei $M = (\Sigma, Z, \delta, S, E)$ ein NFA. Konstruiere einen zu M äquivalenten DFA $M' = (\Sigma, \mathfrak{P}(Z), \delta', z_0', F)$ wie folgt:

- Zustandsmenge von M': die Potenzmenge $\mathfrak{P}(Z)$ von Z,
- $\delta'(Z', a) = \bigcup_{z \in Z'} \delta(z, a) = \widehat{\delta}(Z', a)$ für alle $Z' \subseteq Z$ und $a \in \Sigma$,
- $z_0' = S$,
- $F = \{Z' \subseteq Z \mid Z' \cap E \neq \emptyset\}$.

DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott

Offenbar sind M' und M äquivalent, denn für alle $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ in Σ^* gilt:

$$
\begin{aligned}
x \in L(M) \quad &\Longleftrightarrow \quad \widehat{\delta}(S, x) \cap E \neq \emptyset \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine Folge von Teilmengen} \\
&\qquad\quad Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \subseteq Z \text{ mit } \delta'(S, a_1) = Z_1, \\
&\qquad\quad \delta'(Z_1, a_2) = Z_2, \ldots, \delta'(Z_{n-1}, a_n) = Z_n \text{ und} \\
&\qquad\quad Z_n \cap E \neq \emptyset \\
&\Longleftrightarrow \quad Z_n = \widehat{\delta'}(z_0', x) \in F \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in L(M').
\end{aligned}
$$

Somit ist $L(M') = L(M)$. ❑

DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott

Beispiel: Wir modifizieren den NFA aus dem obigen Beispiel etwas und betrachten den folgenden um einen Zustand kleineren NFA $M = (\Sigma, Z, \delta, S, E)$:

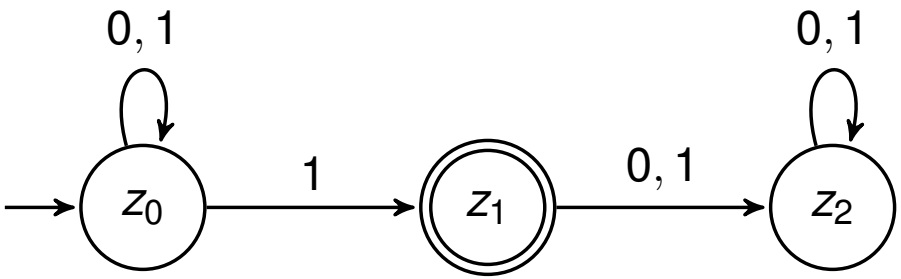


Abbildung: Ein nichtdeterministischer endlicher Automat

Dieser NFA akzeptiert die Sprache aller Wörter über $\{0, 1\}^*$, die an letzter Stelle eine 1 haben.

DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott

Beispiel: Wir konstruieren nun einen zu M äquivalenten DFA $M' = (\Sigma, Z', \delta', S, F)$ gemäß dem Satz von Rabin und Scott:

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \{0, 1\}, \\
Z' &= \{\{z_0, z_1, z_2\}, \{z_0, z_1\}, \{z_0, z_2\}, \{z_1, z_2\}, \{z_0\}, \{z_1\}, \{z_2\}, \emptyset\}, \\
S &= \{z_0\}, \\
F &= \{\{z_0, z_1, z_2\}, \{z_0, z_1\}, \{z_1, z_2\}, \{z_1\}\},
\end{aligned}
$$

δ'	$\emptyset$	$\{z_0\}$	$\{z_1\}$	$\{z_2\}$	$\{z_0, z_1\}$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_1, z_2\}$	$\{z_0, z_1, z_2\}$
0	$\emptyset$	$\{z_0\}$	$\{z_2\}$	$\{z_2\}$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_2\}$	$\{z_0, z_2\}$
1	$\emptyset$	$\{z_0, z_1\}$	$\{z_2\}$	$\{z_2\}$	$\{z_0, z_1, z_2\}$	$\{z_0, z_1, z_2\}$	$\{z_2\}$	$\{z_0, z_1, z_2\}$

Die Zustände $\emptyset$, $\{z_1\}$, $\{z_2\}$, $\{z_1, z_2\}$ können vom Startzustand $\{z_0\}$ nicht erreicht werden und werden zur Vereinfachung weggelassen.

DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott

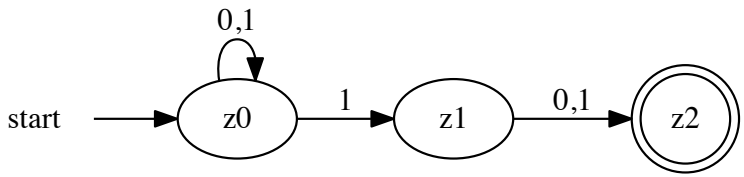
Beispiel: Wir betrachten für $n \geq 1$ die Sprache

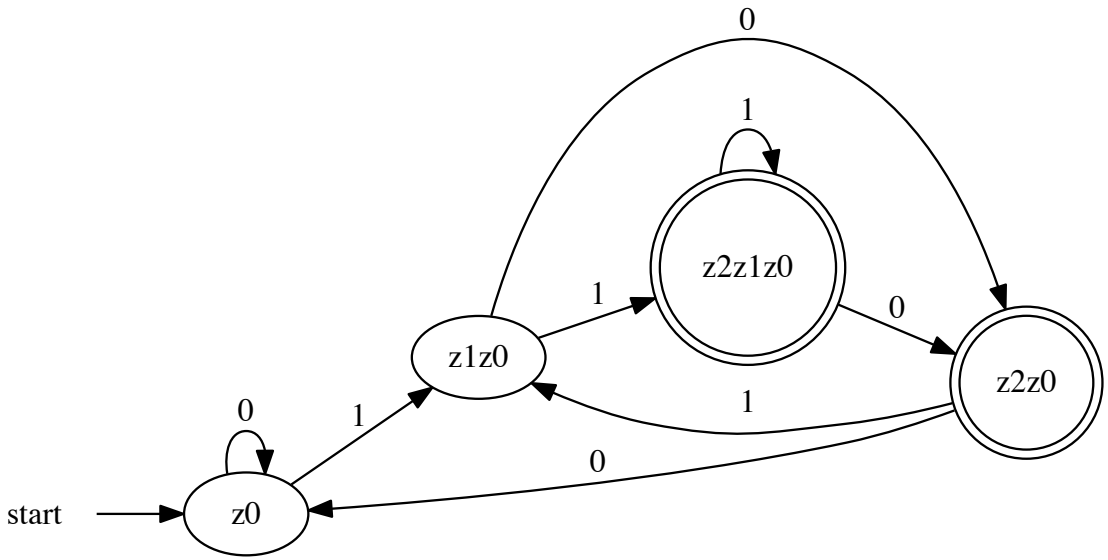
$$\begin{aligned} L_n &= \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{der } n\text{-te Buchstabe von hinten in } x \text{ ist } 1\} \\ &= \{x \in \{0,1\}^* \mid x = u1v \text{ mit } u \in \{0,1\}^* \text{ und } v \in \{0,1\}^{n-1}\}. \end{aligned}$$

Es gilt:

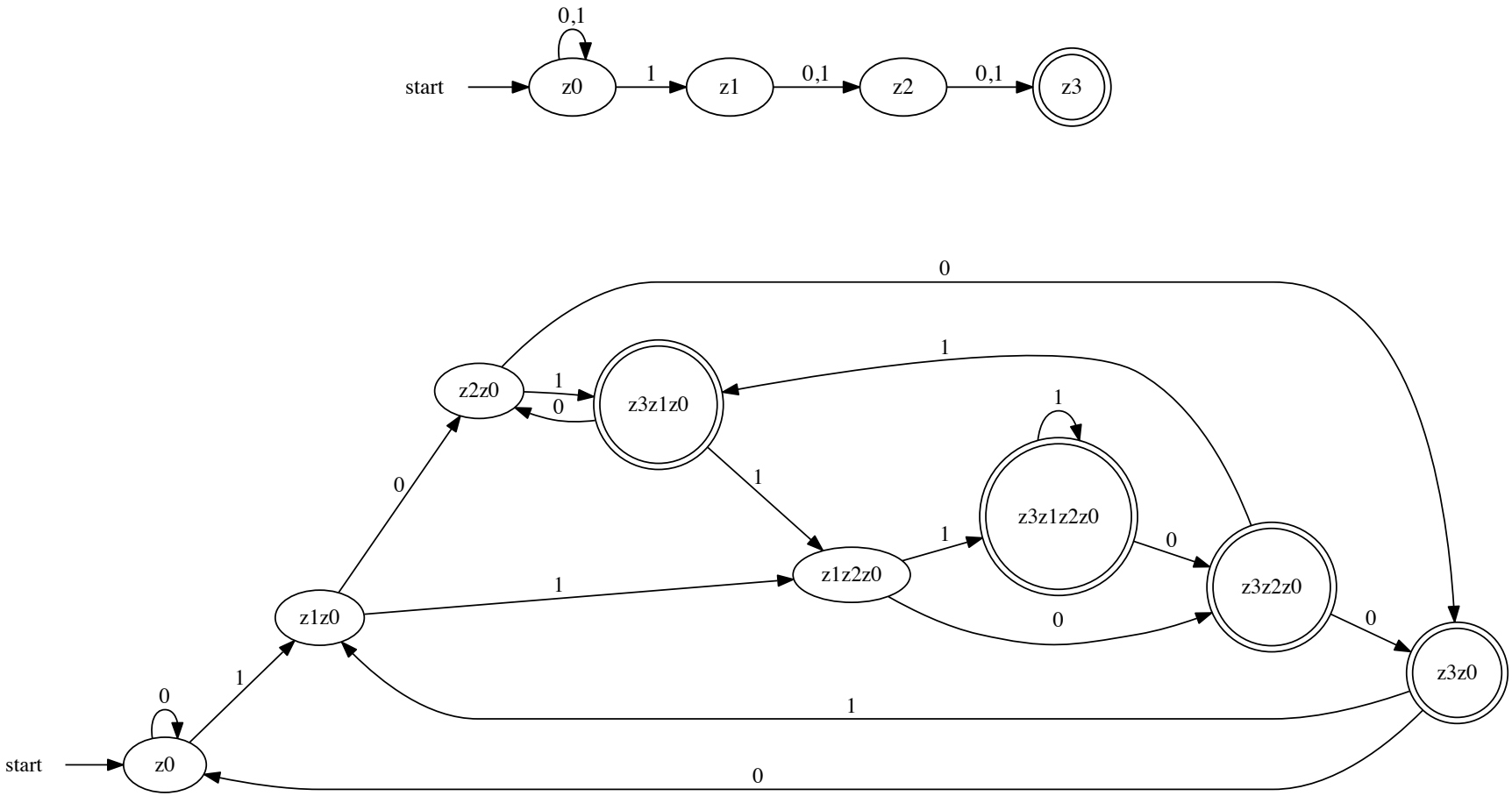
1. Es gibt einen NFA für L_n mit $n+2$ Zuständen.
   (Beweis: Einfache Modifikation der NFAs für L_2 und L_1 in den vorigen Abbildungen.)
2. Jeder DFA für L_n hat mindestens 2^n Zustände.
   (Beweis: siehe Satz von Myhill und Nerode später.)

L_2 : DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott

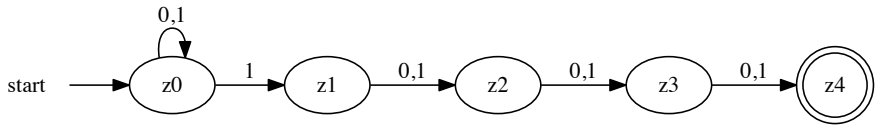


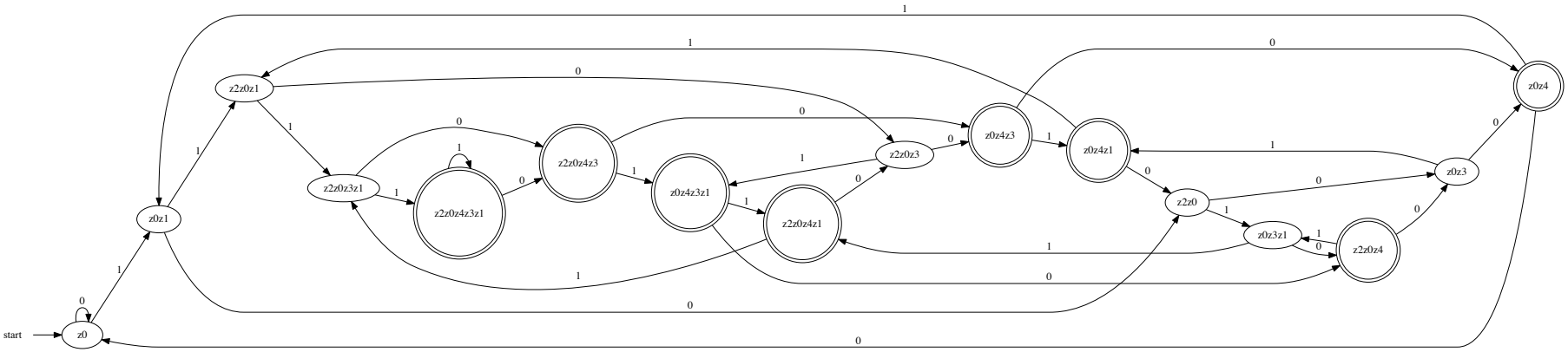


L_3 : DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott

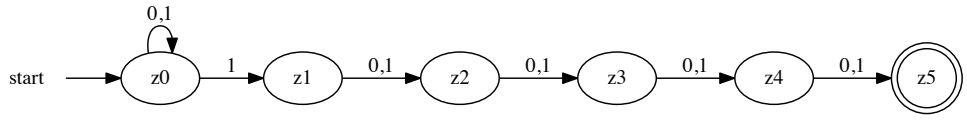


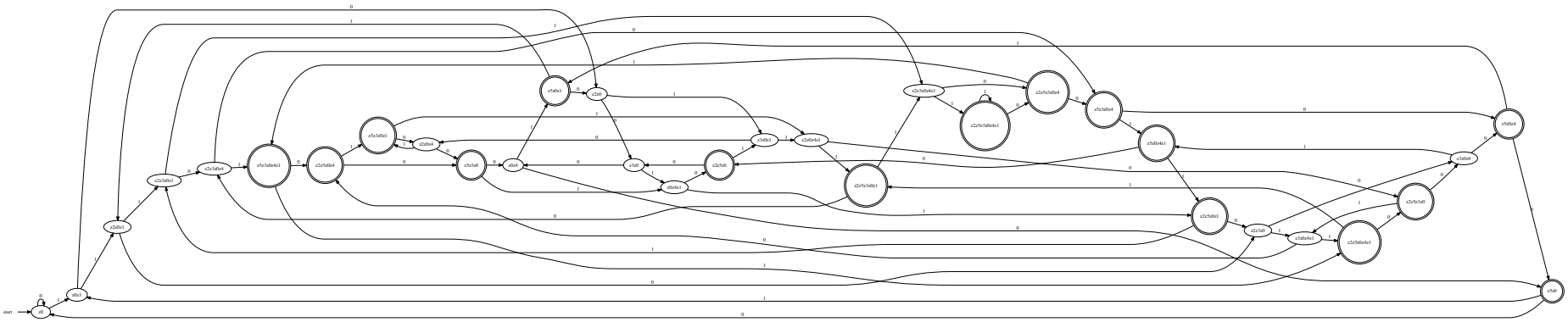
L_4 : DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott



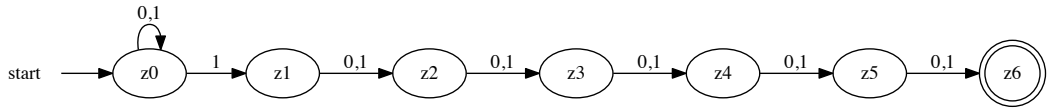


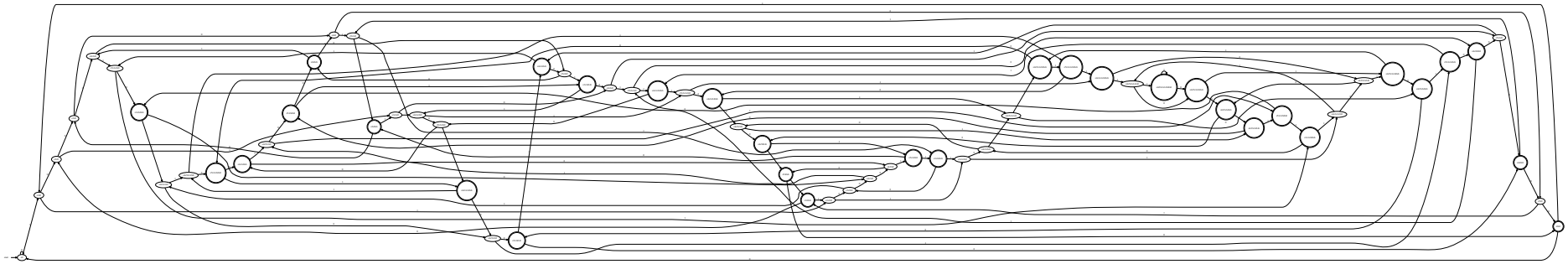
L_5 : DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott





L_6 : DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott





L_8 : DFA versus NFA, Satz von Rabin und Scott

Reguläre Grammatiken und NFAs

Theorem

Für jede reguläre Grammatik G gibt es einen NFA M mit $L(M) = L(G)$.

Beweis: Sei $G = (\Sigma, N, S, P)$ eine gegebene reguläre Grammatik.

Konstruiere einen NFA $M = (\Sigma, Z, \delta, S', F)$ so:

- $Z = N \cup \{X\}$, wobei $X \notin N \cup \Sigma$ ein neues Symbol ist,
- $$F = \begin{cases} \{S, X\} & \text{falls } S \to \lambda \text{ in } P \\ \{X\} & \text{falls } S \to \lambda \text{ nicht in } P, \end{cases}$$
- $S' = \{S\}$ und
- für alle $A \in N$ und $a \in \Sigma$ sei

$$\delta(A, a) = \left(\bigcup_{A \to aB \in P} \{B\} \right) \cup \bigcup_{A \to a \in P} \{X\}.$$

Reguläre Grammatiken und NFAs

Es gilt: $\lambda \in L(G) \iff \lambda \in L(M)$.

Außerdem gilt für alle $n \geq 1$ und $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ in Σ^*:

$x \in L(G)$

$\iff$ es gibt eine Folge $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \in N$ mit

$S \vdash a_1 A_1 \vdash a_1 a_2 A_2 \vdash \cdots \vdash a_1 a_2 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \vdash a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$

$\iff$ es gibt eine Folge $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \in Z$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$,

$A_2 \in \delta(A_1, a_2), \ldots, A_{n-1} \in \delta(A_{n-2}, a_{n-1}), X \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

$\iff$ $\widehat{\delta}(S', x) \cap F = \widehat{\delta}(\{S\}, x) \cap F \neq \emptyset$

$\iff$ $x \in L(M)$.

Somit ist $L(G) = L(M)$. ❑

Reguläre Grammatiken und NFAs

Beispiel: Es sei $G = (\Sigma, N, S, P)$ die folgende reguläre Grammatik:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{0, 1\}, \\ N &= \{S\}, \\ P &= \{S \to 0S \mid 1S \mid 1\}. \end{aligned}$$

Nach dem obigen Beweis konstruieren wir den NFA $M = (\Sigma, Z, \delta, S', F)$ mit

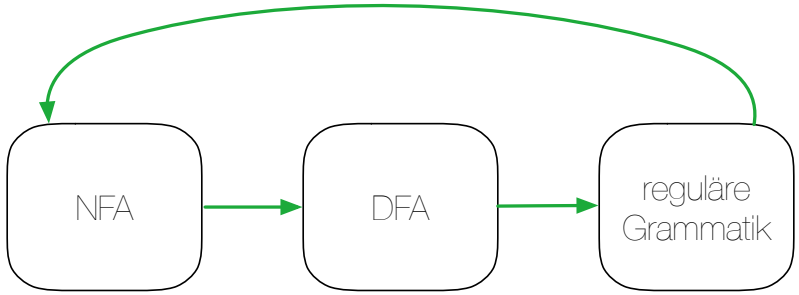
$$\begin{aligned} \Sigma &= \{0, 1\}, & Z &= \{S, X\}, \\ F &= \{X\}, & S' &= \{S\}, \\ \delta &: \delta(S, 0) = \{S\}, \\ & \quad \delta(S, 1) = \{S, X\}. \end{aligned}$$

Reguläre Grammatiken, DFAs und NFAs

Folgerung: $\mathrm{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist DFA}\} = \{L(M) \mid M \text{ ist NFA}\}$.

Bemerkung: Zu jeder regulären Sprache gibt es unendlich viele DFAs bzw. NFAs, die sie akzeptieren.

Ziel erreicht:



Reguläre Ausdrücke

Definition

Sei Σ ein Alphabet. Die *Menge der regulären Ausdrücke* (über Σ) ist definiert durch:

- $\emptyset$ und λ sind reguläre Ausdrücke.
- Jedes $a \in \Sigma$ ist ein regulärer Ausdruck.
- Sind α und β reguläre Ausdrücke, so sind auch
  - $\alpha\beta$,
  - $(\alpha + \beta)$ und
  - $(\alpha)^*$

  reguläre Ausdrücke.
- Nichts sonst ist ein regulärer Ausdruck.

Sprache regulärer Ausdrücke

Definition

Sei Σ ein Alphabet. Jedem regulären Ausdruck γ ist in eindeutiger Weise eine Sprache $L(\gamma) \subseteq \Sigma^*$ zugeordnet (wir sagen: „γ beschreibt $L(\gamma)$“), die so definiert ist:

$$L(\gamma) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \gamma = \emptyset \\ \{\lambda\} & \text{falls } \gamma = \lambda \\ \{a\} & \text{falls } \gamma = a \text{ für ein } a \in \Sigma \\ L(\alpha)L(\beta) & \text{falls } \gamma = \alpha\beta \\ L(\alpha) \cup L(\beta) & \text{falls } \gamma = (\alpha + \beta) \\ L(\alpha)^* & \text{falls } \gamma = (\alpha)^*. \end{cases}$$

Sprache regulärer Ausdrücke

Definition

Zwei reguläre Ausdrücke α_1 und α_2 heißen *äquivalent* (kurz $\alpha_1 \sim \alpha_2$), falls $L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$.

Beispiel: Es sei $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Der reguläre Ausdruck $\alpha_1 = (\lambda + a(a+b)^*)$ beschreibt die Sprache

$$L(\alpha_1) = \{\lambda\} \cup \{ax \mid x \in \{a, b\}^*\},$$

d.h. das leere Wort und alle Wörter über Σ, die mit a beginnen.

2. Der reguläre Ausdruck $\alpha_2 = ((a+b)^*ab)$ beschreibt die Sprache

$$L(\alpha_2) = \{xab \mid x \in \{a, b\}^*\},$$

d.h. alle Wörter über Σ, die mit ab enden.

Sprache regulärer Ausdrücke

Bemerkung:

- Wegen $\emptyset^* = \{\lambda\}$ hätte man den regulären Ausdruck λ in der Definition oben auch weglassen können.
- Formal korrekt hätte man die Menge der regulären Ausdrücke unabhängig vom Alphabet (wie Grammatiken und DFAs) definieren müssen, etwa so:

$$\begin{aligned} \text{RegAusdruck}(\Sigma) &= \{\alpha \mid \alpha \text{ ist regulärer Ausdruck über } \Sigma\} \\ \text{RegAusdruck} &= \bigcup_{\Sigma \text{ ist Alphabet}} \text{RegAusdruck}(\Sigma). \end{aligned}$$

Wir nehmen jedoch an, dass implizit immer ein Alphabet fixiert ist.

Sprache regulärer Ausdrücke

Bemerkung:

- Jede endliche Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ wird durch einen regulären Ausdruck beschrieben. Ist etwa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, so ist $A = L(\alpha)$ mit

$$\alpha = (\cdots((a_1 + a_2) + a_3) + \cdots + a_k).$$

  Somit ist jede endliche Sprache regulär.
- Jeder reguläre Ausdruck α beschreibt genau eine Sprache, nämlich $L(\alpha)$, aber für jede reguläre Sprache $A = L(\alpha)$ gibt es zum Beispiel wegen

$$L((\alpha + \alpha)) = L(\alpha) \cup L(\alpha) = L(\alpha)$$

  unendlich viele reguläre Ausdrücke, die A beschreiben.

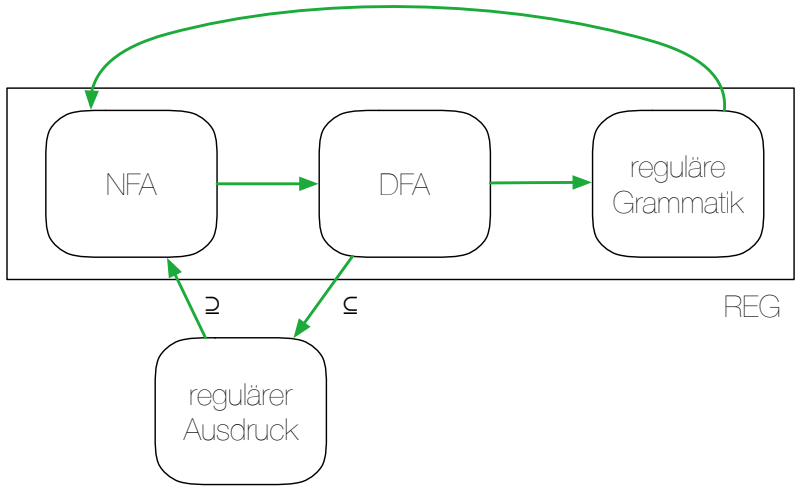
Satz von Kleene

Theorem (Kleene)

$$\text{REG} = \{L(\alpha) \mid \alpha \textit{ ist regulärer Ausdruck}\}.$$

Beweisidee:

1. $\text{REG} \supseteq \{L(\alpha) \mid \alpha$ ist regulärer Ausdruck$\}$: Ausdruck in NFA umwandeln
2. $\text{REG} \subseteq \{L(\alpha) \mid \alpha$ ist regulärer Ausdruck$\}$: DFA in regulären Ausdruck umwandeln



Satz von Kleene: Beweis von ($\supseteq$)

Theorem (Kleene)

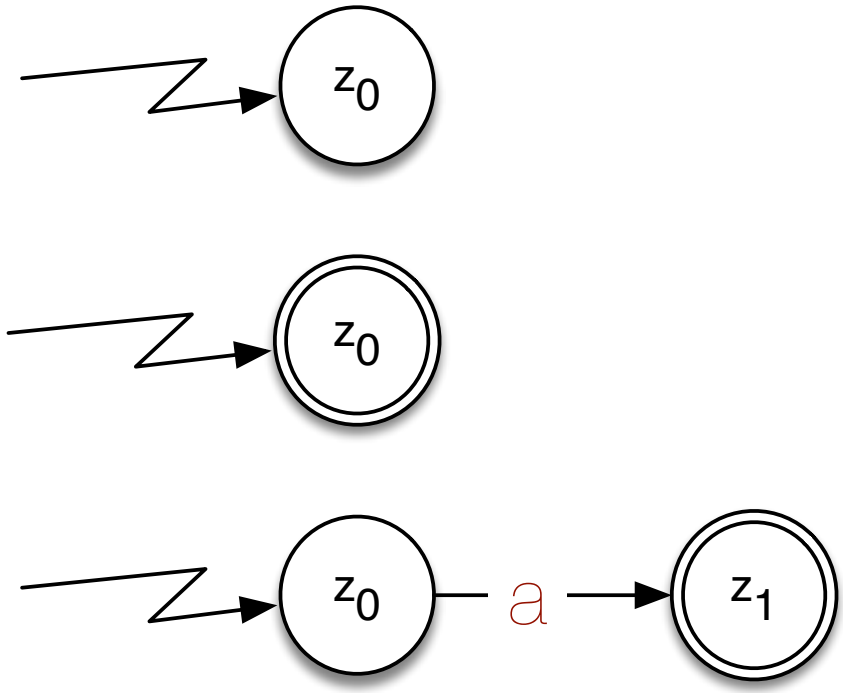
$\mathrm{REG} = \{L(\alpha) \mid \alpha \textit{ ist regulärer Ausdruck}\}$.

Beweis: **($\supseteq$)** Sei $A = L(\alpha)$ für einen regulären Ausdruck α. Wir zeigen durch Induktion über den Aufbau von α, dass $A \in \mathrm{REG}$ durch Angabe eines NFAs M mit $L(M) = A$.

- **Induktionsanfang: $\alpha = \emptyset$ oder $\alpha = \lambda$ oder $\alpha = a \in \Sigma$.**
  Der folgende NFA M leistet je nach Fall das Gewünschte:

$$M = \begin{cases} (\Sigma, \{z_0\}, \emptyset, \{z_0\}, \emptyset) & \text{falls } \alpha = \emptyset \\ (\Sigma, \{z_0\}, \emptyset, \{z_0\}, \{z_0\}) & \text{falls } \alpha = \lambda \\ (\Sigma, \{z_0, z_1\}, \{\delta(z_0, a) = \{z_1\}\}, \{z_0\}, \{z_1\}) & \text{falls } \alpha = a \in \Sigma. \end{cases}$$

Satz von Kleene: Beweis von $(\supseteq)$: $\emptyset$, λ, $a \in \Sigma$



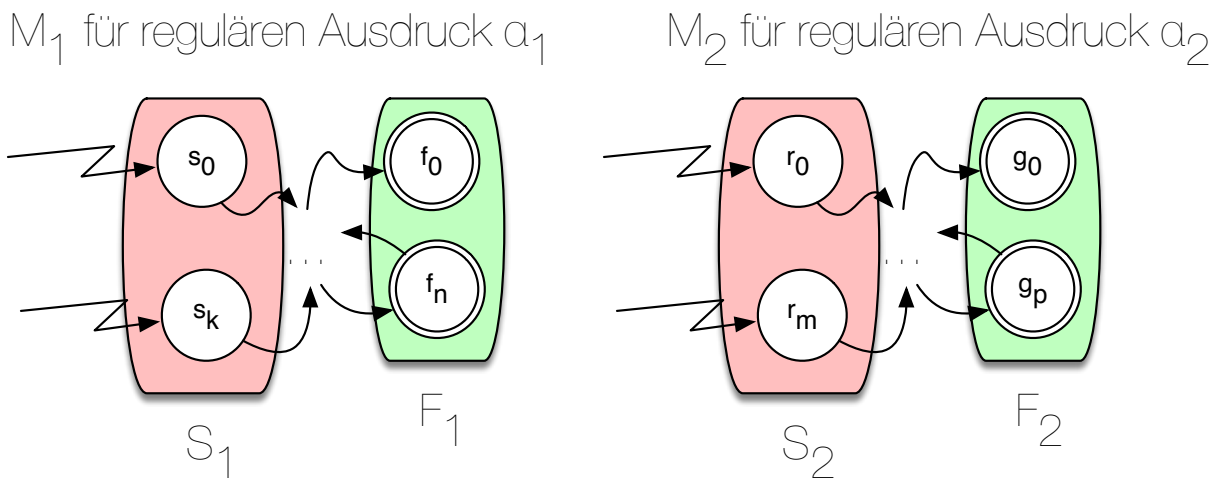
Satz von Kleene: Beweis von ($\supseteq$): Induktionsschritt

- **<u>Induktionsschritt</u>: $\alpha \in \{\alpha_1\alpha_2, (\alpha_1 + \alpha_2), (\alpha_1)^*\}$, für reguläre Ausdrücke α_1 und α_2.**
  Nach Induktionsvoraussetzung existieren NFAs M_1 und M_2 mit $L(M_i) = L(\alpha_i)$, für $i \in \{1, 2\}$. Sei für $i \in \{1, 2\}$:

$$M_i = (\Sigma, Z_i, \delta_i, S_i, F_i),$$

  wobei o.B.d.A. $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ gelte; andernfalls werden Zustände entsprechend umbenannt.

Satz von Kleene: Beweis von ($\supseteq$): M_1 und M_2



Satz von Kleene: Beweis von $(\supseteq)$

- **Fall 1: $\alpha = \alpha_1\alpha_2$.** Definiere $M = (\Sigma, Z, \delta, S, F)$ als die „Hintereinanderschaltung“ von M_1 und M_2 durch:

$$Z = Z_1 \cup Z_2; \quad S = \begin{cases} S_1 & \text{falls } \lambda \notin L(\alpha_1) = L(M_1) \\ S_1 \cup S_2 & \text{falls } \lambda \in L(\alpha_1) = L(M_1); \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} F_2 & \text{falls } \lambda \notin L(\alpha_2) = L(M_2) \\ F_1 \cup F_2 & \text{falls } \lambda \in L(\alpha_2) = L(M_2); \end{cases}$$

$$\delta(z,a) = \begin{cases} \delta_1(z,a) & \text{falls } z \in Z_1 \text{ und } \delta_1(z,a) \cap F_1 = \emptyset \\ \delta_1(z,a) \cup S_2 & \text{falls } z \in Z_1 \text{ und } \delta_1(z,a) \cap F_1 \neq \emptyset \\ \delta_2(z,a) & \text{falls } z \in Z_2 \end{cases}$$

für alle $a \in \Sigma$ und $z \in Z$.

Satz von Kleene: Beweis von $(\supseteq)$

- **Fall 2:** $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)$**.**
  Der „Vereinigungsautomat“

$$M = (\Sigma, Z_1 \cup Z_2, \delta_1 \cup \delta_2, S_1 \cup S_2, F_1 \cup F_2)$$

  von M_1 und M_2 leistet das Gewünschte.

Satz von Kleene: Beweis von ($\supseteq$)

- **Fall 3: $\alpha = (\alpha_1)^*$.**
  Der „Rückkopplungsautomat“

$$M = (\Sigma, Z, \delta, S, F)$$

von M_1 leistet das Gewünschte, der folgendermaßen definiert ist:

- Zunächst fügen wir λ hinzu, falls nötig:

$$\widehat{M} = \begin{cases} M_1 & \text{falls } \lambda \in L(M_1) \\ (\Sigma, \widehat{Z}, \delta, \widehat{S}, \widehat{F}) & \text{falls } \lambda \notin L(M_1) \end{cases}$$

mit $\widehat{Z} = Z_1 \cup \{\hat{z}\}$, $\widehat{S} = S_1 \cup \{\hat{z}\}$, $\widehat{F} = F_1 \cup \{\hat{z}\}$, wobei $\hat{z} \notin Z_1$.
Offenbar ist

$$L(\widehat{M}) = L(M_1) \cup \{\lambda\}.$$

Satz von Kleene: Beweis von $(\supseteq)$

Weiter zu **Fall 3: $\alpha = (\alpha_1)^*$.**

- Rückkopplung: Definiere

$$M = (\Sigma, Z, \delta, S, F),$$

wobei Z, S und F die Menge der Zustände, Anfangszustände und Endzustände von $\widehat{M}$ sind, und für alle $a \in \Sigma$ und $z \in Z$:

$$\delta(z,a) = \begin{cases} \delta_1(z,a) & \text{falls } \delta_1(z,a) \cap F = \emptyset \\ \delta_1(z,a) \cup S & \text{falls } \delta_1(z,a) \cap F \neq \emptyset. \end{cases}$$

Offenbar gilt

$$L(M) = L(M_1)^* = L((\alpha_1)^*) = L(\alpha).$$

Somit ist $\mathrm{REG} \supseteq \{L(\alpha) \mid \alpha \text{ ist regulärer Ausdruck}\}$ gezeigt.

Satz von Kleene: Beweis von ($\subseteq$)

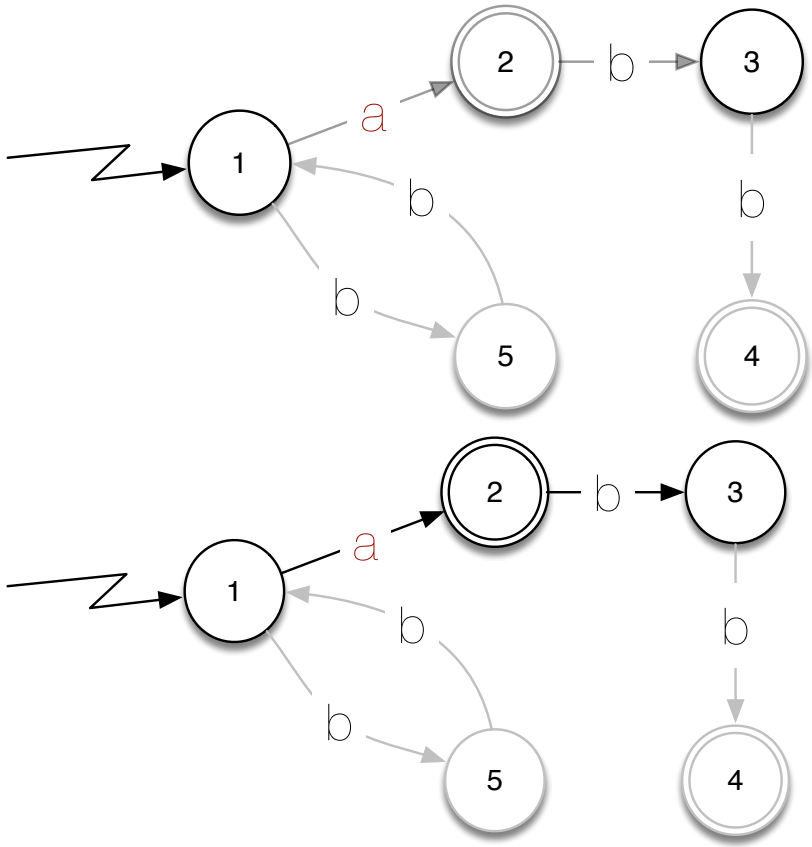
($\subseteq$) Sei $A \in \mathrm{REG}$, und sei M ein DFA mit $L(M) = A$, wobei $M = (\Sigma, Z, \delta, z_1, E)$ mit $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.
Konstruiere einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = A$.
Definiere dazu Sprachen $R^k_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, die sich durch reguläre Ausdrücke beschreiben lassen:

$$R^k_{i,j} = \left\{ x \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \widehat{\delta}(z_i, x) = z_j \text{ und keiner der dabei durchlaufenen} \\ \text{Zustände (außer } z_i \text{ und } z_j \text{ selbst) hat einen Index} \\ \text{größer als } k. \end{array} \right\}.$$

$R^k_{i,j} =$ Wörter, die man mit z_i als Anfangs- und z_j als Endzustand und mit Hilfe der Zustände $z_1, \ldots, z_k$ generieren kann.

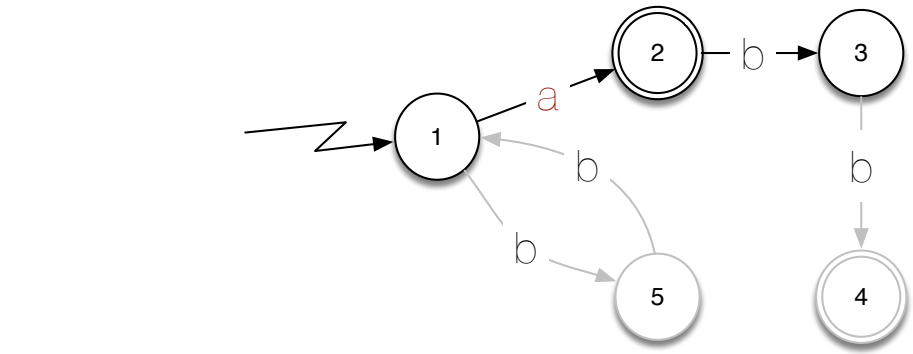
Satz von Kleene: $R^k_{i,j}$

$R^k_{i,j} =$ Wörter, die man mit i als Anfangs- und j als Endzustand und mit Hilfe der Zustände $1, \ldots, k$ generieren kann.

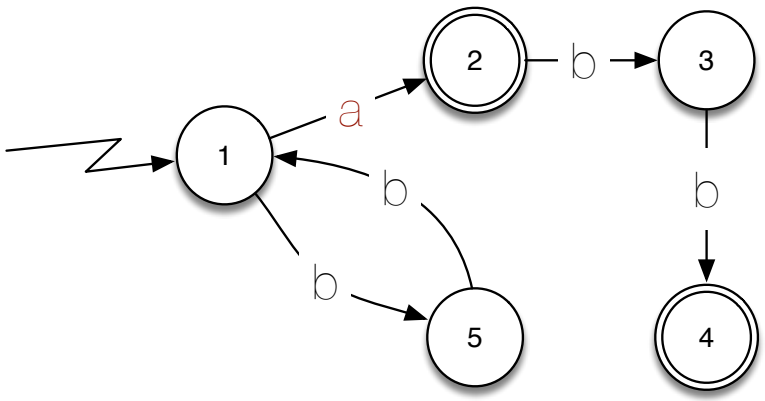


Satz von Kleene: $R^k_{i,j}$

$R^k_{i,j} =$ Wörter, die man mit i als Anfangs- und j als Endzustand und mit Hilfe der Zustände $1, \ldots, k$ generieren kann.



$R^2_{1,3} = \{ab\}$



$R^5_{1,3} = \{ab, bbab, bbbbab, \ldots\}$

Satz von Kleene: Beweis von ($\subseteq$)

Wir zeigen durch Induktion über k: Für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ lässt sich jede Sprache $R_{i,j}^k$ durch einen regulären Ausdruck beschreiben.

- **Induktionsanfang: $k = 0$.** Ist $i \neq j$, so ist

$$R_{i,j}^0 = \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\}.$$

  Ist $i = j$, so ist

$$R_{i,i}^0 = \{\lambda\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_i\}.$$

  In beiden Fällen ist $R_{i,j}^0$ endlich und daher durch einen regulären Ausdruck beschreibbar.

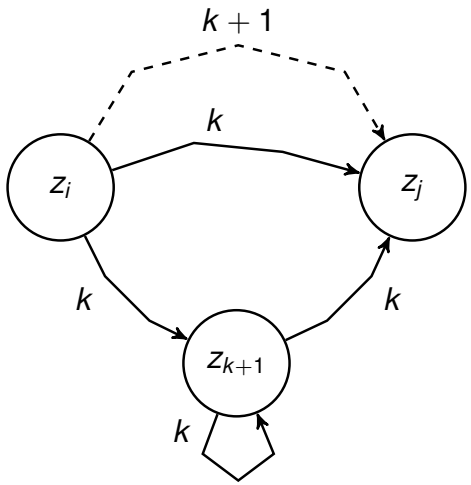
Satz von Kleene: Beweis von ($\subseteq$)

- **Induktionsschritt: $k \mapsto k+1$.** Es gilt

$$R_{i,j}^{k+1} = R_{i,j}^{k} \cup R_{i,k+1}^{k} (R_{k+1,k+1}^{k})^* R_{k+1,j}^{k},$$

denn:

- Entweder braucht man den Zustand z_{k+1} gar nicht, um von z_i nach z_j zu kommen,
- oder z_{k+1} wird dabei einmal oder mehrmals in Schleifen durchlaufen:



Satz von Kleene: Beweis von ($\subseteq$)

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es reguläre Ausdrücke $\alpha_{i,j}^k$ für die Mengen $R_{i,j}^k$. Somit ist

$$\alpha_{i,j}^{k+1} = \left(\alpha_{i,j}^k + \alpha_{i,k+1}^k (\alpha_{k+1,k+1}^k)^* \alpha_{k+1,j}^k\right)$$

ein regulärer Ausdruck für $R_{i,j}^{k+1}$. Ende der Induktion.

Ferner gilt:

$$A = L(M) = \bigcup_{z_i \in E} R_{1,i}^n.$$

Ist also $E = \{z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_m}\}$, so ist

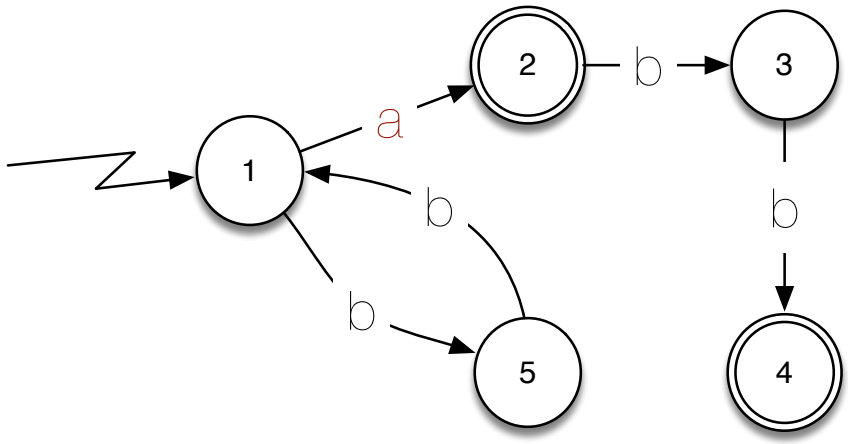
$$\alpha = \left(\alpha_{1,i_1}^n + \alpha_{1,i_2}^n + \cdots + \alpha_{1,i_m}^n\right)$$

ein regulärer Ausdruck für A. ❑

Satz von Kleene: $RA^k_{i,j}$

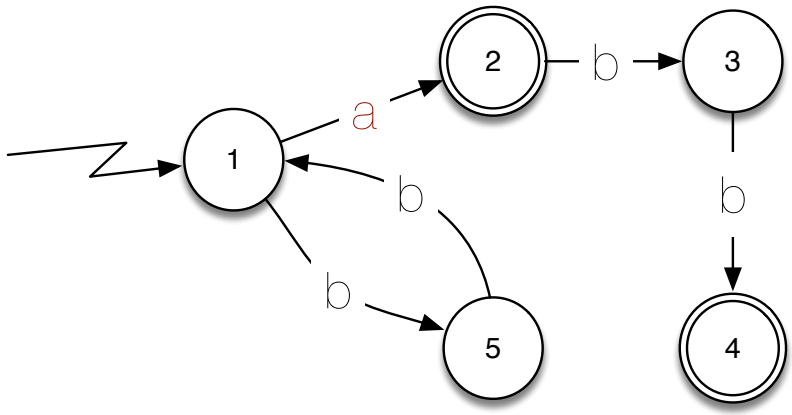
$RA^k_{i,j}$ ist ein regulärer Ausdruck für $R^k_{i,j}$

- $RA^0_{i,j} = \emptyset$ außer $RA^0_{i,i} = \lambda$, $RA^0_{1,2} = a$, $RA^0_{1,5} = RA^0_{2,3} = RA^0_{3,4} = RA^0_{5,1} = b$,
- $RA^1_{i,j} \sim RA^0_{i,j}$ außer für:
  $RA^1_{5,2} = RA^0_{5,2} + RA^0_{5,1}(RA^0_{1,1})^* RA^0_{1,2}$
  $RA^1_{5,2} = \emptyset + b(\lambda)^* a \sim ba$
  $RA^1_{5,5} = RA^0_{5,5} + RA^0_{5,1}(RA^0_{1,1})^* RA^0_{1,5}$
  $RA^1_{5,5} = \lambda + b(\lambda)^* b \sim \lambda + bb$



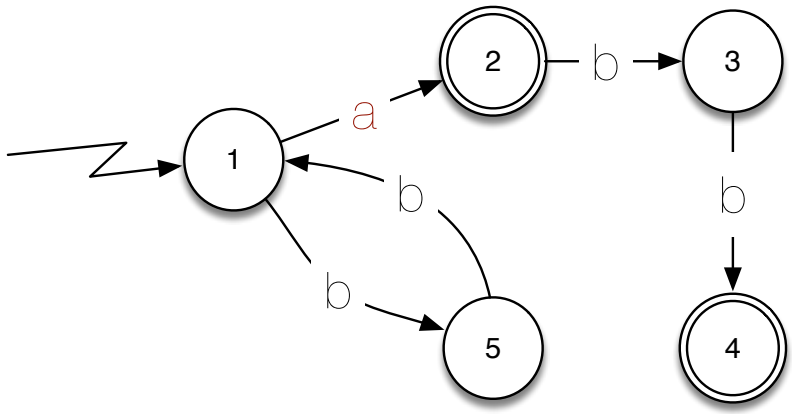
Satz von Kleene: $RA^k_{i,j}$

- $RA^2_{i,j} \sim RA^1_{i,j}$ außer für: $RA^2_{1,3} = \emptyset + a(\lambda)^* b \sim ab$
  $RA^2_{5,3} = \emptyset + ba(\lambda)^* b \sim bab$
- $RA^3_{i,j} \sim RA^2_{i,j}$ außer für: $RA^3_{2,4} = \emptyset + b(\lambda)^* b \sim bb$
  $RA^3_{1,4} = \emptyset + ab(\lambda)^* b \sim abb$
  $RA^3_{5,4} = \emptyset + bab(\lambda)^* b \sim babb$
- $RA^5_{i,j} \sim RA^4_{i,j} \sim RA^3_{i,j}$ außer z. B. für:
  $RA^5_{1,2} = RA^4_{1,2} + RA^4_{1,5}(RA^4_{5,5})^* RA^4_{5,2} = a + b(\lambda + bb)^* ba \sim (bb)^* a$
  $RA^5_{1,4} = abb + b(\lambda + bb)^* babb \sim (bb)^* abb$



Satz von Kleene: $RA^k_{i,j}$

- $RA^5_{1,2} = b(\lambda + bb)^* ba \sim (bb)^* a$
  $RA^5_{1,4} = abb + b(\lambda + bb)^* babb \sim (bb)^* abb$
- regulärer Ausdruck für den DFA:
  $RA^5_{1,2} + RA^5_{1,2} \sim (bb)^* a + (bb)^* abb \sim (bb)^* a(\lambda + bb)$



Satz von Kleene: $RA^k_{i,j}$

Ohne Vereinfachung (z. B. $\lambda+\emptyset \sim \lambda$) ist der Ausdruck deutlich komplizierter:

a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(λ+∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅)))+∅)+((∅+((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+
((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(λ+∅+(∅
(*(λ)(a+∅))+∅)))+∅)))+∅)+((∅+((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)+((∅+((λ+∅)
(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))
(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(λ+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(a
∅)(*(λ)(b+∅))+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)))+∅)+((∅+((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+
∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)))+∅)))+∅)+((∅+
((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)+((∅+((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+
∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+
(∅(*(λ)(b+∅))+∅)))+∅)+((∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)+
((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)))+∅)))+∅))(*(λ)(∅+((b+∅)(*(λ)(a+∅))+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(λ+∅+

Satz von Kleene: $RA^k_{i,j}$

Ohne Vereinfachung ist der Ausdruck deutlich komplizierter (Teil 2):

(∅(*(λ)(a+∅))+∅)))+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)∅)+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅)+

((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(λ+∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅)))+∅)))+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)∅)+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅

(*(λ)∅)+∅)))+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)∅)+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+

(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(λ+∅+(∅(*(λ)(a+∅))+

∅)))+∅)+((∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)

(a+∅))+∅))(*(λ)(λ+∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅)))+∅)))+∅)))+∅)+(∅+((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅

(*(λ)∅)+∅)))+∅)+((∅+((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+

((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)))+∅)+((∅+((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅

(*(λ)∅)+∅)))+∅)+((∅+((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+

((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)))+∅))(*(λ)(λ+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+

∅)))+∅)+((∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+

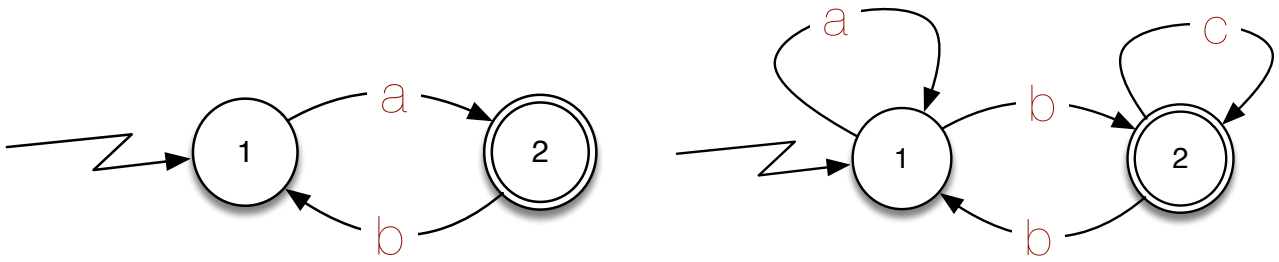
∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)))+∅)))+∅)+((b+∅+((λ+∅)(*(λ)(b+∅))+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)))+∅)+

Satz von Kleene: $RA^k_{i,j}$

Ohne Vereinfachung ist der Ausdruck deutlich komplizierter (Teil 3/3):

∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)))+∅)))+∅)+((∅+((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)+((∅+
((λ+∅)(*(λ)∅)+∅)+((a+∅+((λ+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)
(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)))+∅)+((∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+
((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)(b+∅))+∅)))+
∅)))+∅)))+∅))(*(λ)(∅+((b+∅)(*(λ)∅)+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)∅)+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)
(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)))+∅)+((∅
+((b+∅)(*(λ)∅)+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)∅)+∅)+((∅+((b+∅)(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+
(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)))(*(λ)(λ+∅+(∅(*(λ)∅)+
∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)+((∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅))
(*(λ)(b+∅+(∅(*(λ)∅)+∅)+((∅+(∅(*(λ)(a+∅))+∅))(*(λ)(∅+(∅(*(λ)∅)+∅)))+∅)))+∅)))+∅)+∅)

Satz von Kleene: $RA^k_{i,j}$



- $RA^2_{1,2} = a + a((ba)^*(\lambda + ba)) \sim a + a(ba)^* \sim a(ba)^*$
- $RA^2_{1,2}$ = b + (λ+a)(a*)b + (b+(λ+a)(a*)b) ((λ+c+b(a*)b)*) (λ+c+b(a*)b)
  $\sim$ a*b(c+b(a*b))*

Gleichungssysteme

Ziel: Bestimmung der von einem NFA (bzw. DFA) akzeptierten Sprache durch Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Gegeben: NFA $M = (\Sigma, Z, \delta, S, F)$ mit $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.

Gesucht: $L(M)$.

Methode: Bilde ein Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen wie folgt:

1. Jedes $z_i \in Z$, $1 \leq i \leq n$, ist Variable auf der linken Seite einer Gleichung.
2. Gilt $z_j \in \delta(z_i, a)$ für $z_i, z_j \in Z$ und $a \in \Sigma$, so ist az_j Summand auf der rechten Seite der Gleichung „$z_i = \cdots$“.
3. Gilt $z_i \in F$, so ist $\emptyset^*$ Summand auf der rechten Seite der Gleichung „$z_i = \cdots$“.

Gleichungssysteme

Methode: Die z_i werden als reguläre Sprachen (bzw. Ausdrücke) interpretiert und gemäß dem folgenden Lemma und Satz ausgerechnet. Es gilt dann:

$$L(M) = \bigcup_{z_i \in S} z_i$$

bzw. $L(M) = L(\alpha)$ für den regulären Ausdruck

$$\alpha = \sum_{z_i \in S} z_i.$$

Gleichungssysteme

Lemma

Sind $A, B \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen mit $\lambda \notin A$, so gibt es genau eine reguläre Sprache X, die Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$X = AX \cup B. \tag{1}$$

Beweis: Siehe Tafel. ❑

Bemerkung: Gilt $\lambda \in A$ in (1), so ist die reguläre Menge $X = A^*B$ ebenfalls Lösung von (1). Allerdings muss diese dann nicht mehr eindeutig sein, da $y = vw \in AY$ auch für $v = \lambda$ gelten kann und der Widerspruch aus dem Beweis dann nicht auftreten muss.

Gleichungssysteme

Aus obiger Methode ergibt sich ein Gleichungssystem der Form:

$$\begin{aligned} z_1 &= A_{11}z_1 \cup A_{12}z_2 \cup \cdots \cup A_{1n}z_n \cup B_1 \\ z_2 &= A_{21}z_1 \cup A_{22}z_2 \cup \cdots \cup A_{2n}z_n \cup B_2 \\ &\vdots \\ z_n &= A_{n1}z_1 \cup A_{n2}z_2 \cup \cdots \cup A_{nn}z_n \cup B_n \end{aligned} \tag{2}$$

Theorem

Gilt $A_{ij}, B_k \in \mathrm{REG}$ und $\lambda \notin A_{ij}$ für alle $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ im obigen Gleichungssystem (2), dann hat es eine eindeutig bestimmte Lösung durch reguläre Mengen z_i, $1 \leq i \leq n$.

Gleichungssysteme

Beweis: Gegeben sei ein Gleichungssystem der Form (2). Löse es sukzessive durch Anwendung der folgenden Schritte:

- Gibt es Gleichungen „$z_i = \cdots$“, deren linke Seite z_i nicht auf der rechten Seite vorkommt, so eliminiere diese Gleichung „$z_i = \cdots$“ und die Variable z_i in jeder anderen Gleichung durch Einsetzen der rechten Seite von „$z_i = \cdots$“.
- Vereinfache nach dem Distributivgesetz

$$UX \cup VX = (U \cup V)X.$$

Gleichungssysteme

- Das entstandene System hat wieder die Form (2), wobei nun jede linke Seite z_i auch rechts vorkommt. Das heißt, jede verbliebene Gleichung hat die Form (1):

$$z_i \quad = \quad Az_i \cup B,$$

wobei A und B sich aus den Koeffizienten $A_{ij}, B_k \in \mathrm{REG}$ und den Variablen z_j, $i \neq j$, in (2) gemäß dem obigen Umformungsprozess ergeben.
Nach dem obigen Lemma hat eine solche Gleichung die eindeutige Lösung

$$A^* B,$$

die eine reguläre Sprache ist.

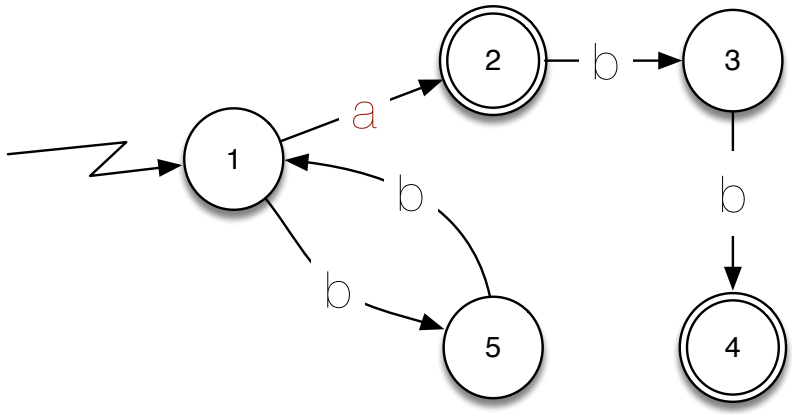
Gleichungssysteme

- Ersetze der Reihe nach alle noch vorhandenen Variablen durch die entsprechenden Lösungen. Stets entsteht dabei ein System von der Form (2) mit einer Variablen weniger, und in keiner der Koeffizientenmengen kommt λ vor.

Der Satz ist bewiesen. ❑

Pumping-Lemma

- Eine reguläre Sprache kann von einem DFA oder NFA akzeptiert werden.
- Was folgt daraus für “längere” Wörter der Sprache?



- Was kann man hier für Wörter mit mindestens 5 Buchstaben aussagen?
- L = $\{a, abb, bba, bbabb, bbbba, bbbbabb, bbbbbba, bbbbbbabb, \ldots\}$
- bbabb $\in L$, bbbbabb $\in L$, bbbbbbabb $\in L$, . . .

Pumping-Lemma

Ziel: Nachweis der Nichtregularität von Sprachen.

Theorem (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $L \in \mathrm{REG}$. Dann existiert eine (von L abhängige) Zahl $n \geq 1$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, wobei gilt:

1. $|uv| \leq n$,
2. $|v| \geq 1$,
3. $(\forall i \geq 0)\,[uv^i w \in L]$.

Pumping-Lemma

Ziel: Nachweis der Nichtregularität von Sprachen.

Theorem (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $L \in \mathrm{REG}$. Dann existiert eine (von L abhängige) Zahl $n \geq 1$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = bmw$, wobei gilt:

1. $|bm| \leq n$,
2. $|m| \geq 1$,
3. $(\forall i \geq 0)\,[bm^i w \in L]$.

Pumping-Lemma

Ziel: Nachweis der Nichtregularität von Sprachen.

Theorem (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $L \in \mathrm{REG}$. Dann existiert eine (von L abhängige) Zahl $n \geq 1$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = \boldsymbol{uvw}$, wobei gilt:

1. $|\boldsymbol{uv}| \leq n$,
2. $|\boldsymbol{v}| \geq 1$,
3. $(\forall i \geq 0)\,[\boldsymbol{uv^i w} \in L]$.

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis: Sei $L \in \mathrm{REG}$, und sei M ein DFA für L.

- Wähle als n die Zahl der Zustände von M.
- Sei $x \in L$ beliebig mit $|x| \geq n$.
- Beim Abarbeiten von x durchläuft M genau $|x| + 1 \geq n + 1$ Zustände einschließlich des Startzustands.
- Folglich gibt es einen Zustand z, der zweimal durchlaufen wird. Das heißt, M hat bei Eingabe x eine Schleife durchlaufen.

Pumping-Lemma: Beweis

- Wähle nun die Zerlegung $x = uvw$ so, dass nach Lesen von u und von uv derselbe Zustand z erreicht ist und die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind. Es ist klar, dass das geht.

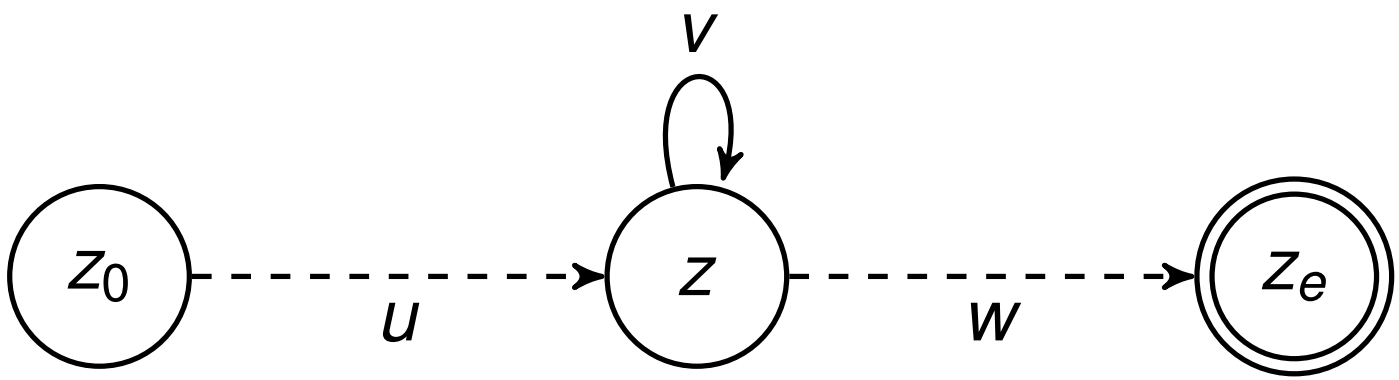


Abbildung: Beweis des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen

Pumping-Lemma: Beweis

- M erreicht somit denselben Endzustand z_e bei Eingabe von

$$\begin{aligned} uv^0w &= uw \\ uv^1w &= uvw = x \\ uv^2w & \\ &\vdots \\ uv^iw & \\ &\vdots \end{aligned}$$

(siehe Abbildung auf der vorherigen Folie).

- Somit sind alle diese Wörter in L, und auch Eigenschaft (3) ist bewiesen. ❑

Pumping-Lemma

Bemerkung: Man beachte, dass das Pumping-Lemma keine Charakterisierung von REG liefert, sondern lediglich eine Implikation:

$$L \in \mathrm{REG} \quad \Rightarrow \quad (\exists n \geq 1)\,(\forall x \in L, |x| \geq n)\,(\exists u, v, w \in \Sigma^*)$$
$$[x = uvw \wedge (1) \wedge (2) \wedge (3)].$$

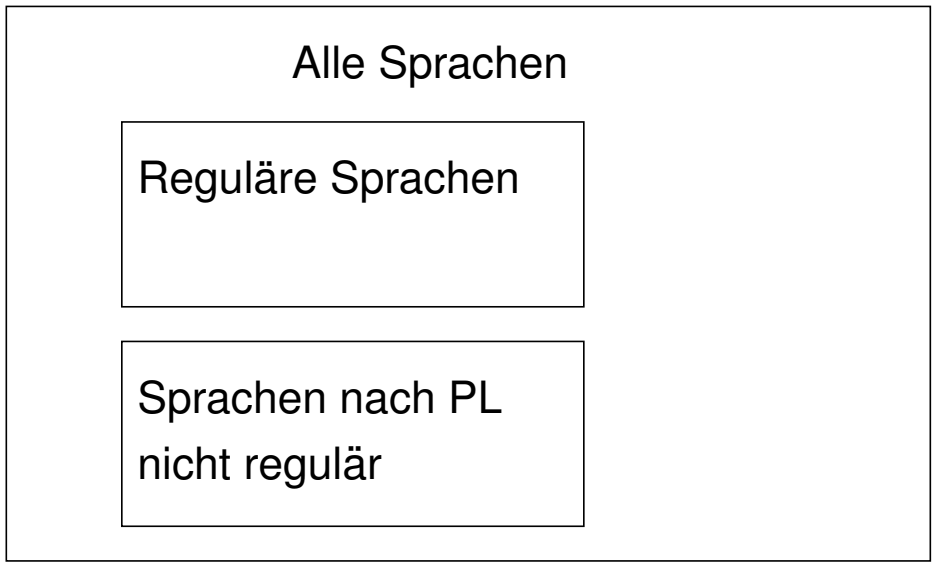


Abbildung: Anwendbarkeit des Pumping-Lemmas (PL)

Pumping-Lemma: Anwendungen

Behauptung: $L = \{a^m b^m \mid m \geq 1\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Der Beweis wird indirekt geführt.

- Angenommen, $L \in \mathrm{REG}$.
- Sei n die Zahl, die nach dem Pumping-Lemma für L existiert.
- Betrachte das Wort

$$x = a^n b^n$$

mit $|x| = 2n > n$.

Pumping-Lemma: Anwendungen

- Da $x \in L$, lässt sich x so in

$$x = uvw = a^n b^n$$

zerlegen, dass gilt:

1. $|uv| \leq n$, d.h., $uv = a^m$ für $m \leq n$;
2. $|v| \geq 1$, d.h., $v = a^k$ mit $k \geq 1$;
3. $(\forall i \geq 0)\,[uv^i w \in L]$.

- Insbesondere gilt für $i = 0$:

$$uv^0 w = uw = a^{n-k} b^n \in L,$$

was ein Widerspruch zur Definition von L ist.

- Also ist die Annahme falsch und L nicht regulär. ❑

Pumping-Lemma: Anwendungen

Behauptung: $L = \{0^m \mid m \text{ ist Quadratzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Der Beweis wird wieder indirekt geführt.

- Angenommen, $L \in \mathrm{REG}$.
- Sei n die Zahl, die nach dem Pumping-Lemma für L existiert.
- Betrachte das Wort

$$x = 0^{n^2}$$

mit $|x| = n^2 \geq n$.

Pumping-Lemma: Anwendungen

- Da $x \in L$, lässt sich x so in

$$x = uvw = 0^{n^2}$$

zerlegen, dass die Bedingungen (1), (2) und (3) aus dem Pumping-Lemma gelten. Aus den Bedingungen (1) und (2) folgt:

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n.$$

- Aus Bedingung (3) folgt für $i = 2$, dass uv^2w ein Wort in L ist.
- Andererseits gilt:

$$n^2 = |x| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

- Folglich ist die Länge des Wortes $uv^2w \in L$ keine Quadratzahl, was ein Widerspruch zur Definition von L ist.
- Also ist die Annahme falsch und L nicht regulär. ❑

Pumping-Lemma: für eine nichtreguläre Sprache

Beispiel: Definiere die Sprache

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x = 1^k \text{ mit } k \geq 0 \text{ oder } x = 0^j 1^{k^2} \text{ mit } j \geq 1 \text{ und } k \geq 1\}.$$

Wir versuchen wieder (wie sich hier zeigt: vergeblich!) einen Widerspruchsbeweis für $L \notin \text{REG}$ und nehmen also $L \in \text{REG}$ an.

- Sei $x \in L$ beliebig mit $|x| \geq n$, wobei n die Pumping-Lemma-Zahl für L ist.
- Nach dem Pumping-Lemma gibt es eine Zerlegung $x = uvw$, die die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt.

Pumping-Lemma: für eine nichtreguläre Sprache

Beispiel:

Fall 1: $\boldsymbol{x = 1^k}$. Für $x = 1^k = uvw$ liefern diese drei Bedingungen (insbesondere $uv^i w = 1^{k'} \in L$ für alle $i \geq 0$) jedoch keinen Widerspruch.

Fall 2: $\boldsymbol{x = 0^j 1^{k^2}}$. Auch für $x = 0^j 1^{k^2} = uvw$ ergibt sich kein Widerspruch aus den drei Bedingungen; insbesondere könnte die Zerlegung $x = uvw$ mit $u = \lambda$ und $v = 0$ (da $j \geq 1$) gewählt worden sein, so dass $uv^i w = 0^{j+i-1} 1^{k^2} \in L$ für alle $i \geq 0$ tatsächlich gilt.

Auch wenn das Pumping-Lemma hier nicht den gewünschten Widerspruch liefert, kann man mit einer Verallgemeinerung des Pumping-Lemmas tatsächlich zeigen, dass L nicht regulär ist.

Satz von Myhill und Nerode

Was sind minimale Automaten für die folgenden Sprachen?

- $L_1 = \{ac, bc\}$
- $L_2 = \{aca, bbca\}$
- $L_3 = \{abc, abcbc, abcbcbc, \ldots\}$

Satz von Myhill und Nerode

Man kann einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ wie folgt eine Äquivalenzrelation R_L auf Σ^* zuordnen.

Definition (Myhill-Nerode-Relation)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ gegeben. Für $x, y \in \Sigma^*$ gelte $x \; R_L \; y$ genau dann, wenn

$$(\forall z \in \Sigma^*)\,[xz \in L \iff yz \in L].$$

Insbesondere gilt für Wörter $x, y \in \Sigma^*$ mit $x \; R_L \; y$:

$$x \in L \iff y \in L,$$

nämlich für $z = \lambda$.

Satz von Myhill und Nerode

Für welche $x, y \in \Sigma^*$ gilt

$$(\forall z \in \Sigma^*)\,(xz \in L_i \iff yz \in L_i)$$

in den folgenden Sprachen?

- $L_1 = \{ac, bc\}$
- $L_2 = \{aca, bbca\}$
- $L_3 = \{abc, abcbc, abcbcbc, \ldots\}$

- $a\ R_{L_1}\ b, \quad ac\ R_{L_1}\ bc, \quad c\ R_{L_1}\ bb\ R_{L_1}\ aca\ R_{L_1}\ \ldots$
- $a\ R_{L_2}\ bb, \quad ac\ R_{L_2}\ bbc, \quad aca\ R_{L_2}\ bbca$
- $abc\ R_{L_3}\ abcbc\ R_{L_3}\ abcbcbc\ldots, \quad ab\ R_{L_3}\ abcb\ R_{L_3}\ abcbcb\ldots,$ aber nicht $a\ R_{L_3}\ abc$

Satz von Myhill und Nerode

Die binäre Relation R_L auf Σ^* mit

$$(\forall z \in \Sigma^*)\,[xz \in L \iff yz \in L].$$

ist in der Tat eine Äquivalenzrelation auf Σ^*:

- Reflexivität: $x\ R_L\ x$
- Symmetrie: $x\ R_L\ y \Rightarrow y\ R_L\ x$
- Transitivität: $(x\ R_L\ y \wedge y\ R_L\ z) \Rightarrow x\ R_L\ z$

Satz von Myhill und Nerode

Definition

Wie jede Äquivalenzrelation induziert R_L eine Zerlegung (d.h. eine disjunkte und vollständige Überdeckung) von Σ^* in Äquivalenzklassen:

$$[x] = \{y \in \Sigma^* \mid x \; R_L \; y\},$$

die repräsentantenunabhängig ist.

Die Anzahl der verschiedenen Äquivalenzklassen wird bezeichnet mit

$$\text{Index}(R_L) = \|\{[x] \mid x \in \Sigma^*\}\|.$$

Satz von Myhill und Nerode

Theorem (Myhill und Nerode)

Es sei L eine Sprache über einem beliebigen Alphabet Σ.

$$L \in \text{REG} \iff \text{Index}(R_L) < \infty.$$

Satz von Myhill und Nerode: Beweis

Beweis: **($\Rightarrow$)** Sei $L \in \mathrm{REG}$, und sei $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

- Definiere eine Äquivalenzrelation R_M auf Σ^* wie folgt:
  $x \; R_M \; y$ gelte genau dann, wenn

$$\widehat{\delta}(z_0, x) = \widehat{\delta}(z_0, y),$$

  d.h., M ist nach dem Lesen von x im selben Zustand wie nach dem Lesen von y.

- Es gilt:

$$\mathrm{Index}(R_M) \quad = \quad \text{Anzahl der von } z_0 \text{ aus erreichbaren Zustände.} \qquad (3)$$

Satz von Myhill und Nerode: Beweis

- Wir zeigen nun:

$$(\forall x, y \in \Sigma^*)\,[x\ R_M\ y \Rightarrow x\ R_L\ y], \tag{4}$$

d.h., $R_M \subseteq R_L$ (also ist R_M eine Verfeinerung von R_L).

Sei $x\ R_M\ y$, d.h., $\widehat{\delta}(z_0, x) = \widehat{\delta}(z_0, y)$. Sei $z \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} xz \in L &\iff \widehat{\delta}(z_0, xz) \in E &&\iff \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(z_0, x), z) \in E \\ &\iff \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(z_0, y), z) \in E &&\iff \widehat{\delta}(z_0, yz) \in E \\ &\iff yz \in L. \end{aligned}$$

Folglich gilt $x\ R_L\ y$ und somit (4).

- Aus (3) und (4) folgt:

$$\mathrm{Index}(R_L) \leq \mathrm{Index}(R_M) \leq \|Z\| < \infty.$$

Satz von Myhill und Nerode: Beweis

($\Leftarrow$) Sei $\text{Index}(R_L) = k < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann lässt sich Σ^* in k Äquivalenzklassen bezüglich R_L zerlegen:

$$[x_1] \cup [x_2] \cup \cdots \cup [x_k] = \Sigma^*,$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \Sigma^*$.

Der *Äquivalenzklassen-Automat* für L ist der DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$, der definiert ist durch:

$$\begin{aligned} Z &= \{[x_1], [x_2], \ldots, [x_k]\}, \\ \delta([x], a) &= [xa] \text{ für jedes } [x] \in Z \text{ und } a \in \Sigma, \\ z_0 &= [\lambda], \\ F &= \{[x] \mid x \in L\}. \end{aligned}$$

Satz von Myhill und Nerode: Beweis

Lemma

Für alle $x' \in [x]$ *und* $a \in \Sigma$ *gilt* $[x'a] = [xa]$. *Insbesondere gilt* $\widehat{\delta}([\lambda], x) = [x]$ *für jedes* $x \in \Sigma^*$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} x \in L(M) &\iff \widehat{\delta}(z_0, x) \in F \\ &\iff \widehat{\delta}([\lambda], x) \in F \\ &\iff [x] \in F \quad \text{(nach Lemma)} \\ &\iff x \in L. \end{aligned}$$

Also ist $L \in \mathrm{REG}$. ❑

Satz von Myhill und Nerode: Anwendungen

Beispiel: [Satz von Myhill und Nerode: Nachweis der Nichtregularität]

- Wir zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode, dass

$$L = \{a^m b^m \mid m \geq 1\}$$

nicht regulär ist.

- Zu den Äquivalenzklassen von L bzgl. R_L gehören:

$$\begin{aligned}
[ab] &= \{x \in \Sigma^* \mid ab\ R_L\ x\} = \{ab, a^2b^2, a^3b^3, \ldots\} = L \\
[a^2b] &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \ldots\} \\
[a^3b] &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \ldots\} \\
&\vdots \\
[a^kb] &= \{a^kb, a^{k+1}b^2, a^{k+2}b^3, \ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Satz von Myhill und Nerode: Anwendungen

Beispiel: [Satz von Myhill und Nerode: Nachweis der Nichtregularität]

- Diese Äquivalenzklassen sind alle paarweise verschieden, d.h.,

$$[a^i b] \neq [a^j b] \quad \text{für } i \neq j.$$

Denn für $z = b^{i-1}$ gilt

$$a^i bz \in L, \quad \text{aber} \quad a^j bz \notin L.$$

- Folglich ist $\text{Index}(R_L) = \infty$.
- Nach dem Satz von Myhill und Nerode ist $L \notin \text{REG}$. ❑

Satz von Myhill und Nerode: Anwendungen

Beispiel: [Satz von Myhill und Nerode: Nachweis der Regularität]

- Wir zeigen, dass die folgende Sprache L regulär ist:

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ endet mit } aa\}.$$

- Die Äquivalenzklassen von L bzgl. R_L sind:

$$\begin{aligned}
[aa] &= \{x \in \{a,b\}^* \mid aa\ R_L\ x\} \\
&= \{a^2, a^3, a^4, \ldots, ba^2, ba^3, ba^4, \ldots\} = L \\
[a] &= \{a, ba, b^2a, \ldots\} \\
&= \{x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ endet mit } a, \text{ aber nicht mit } aa\} \\
[\lambda] &= \{\lambda, b, ab, \ldots\} = \{x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ endet nicht mit } a\}.
\end{aligned}$$

- Da $\{a,b\}^* = [aa] \cup [a] \cup [\lambda]$, ist $\text{Index}(R_L) = 3$.
- Nach dem Satz von Myhill und Nerode ist $L \in \text{REG}$. ❑

Satz von Myhill und Nerode: Anwendungen

Beispiel: [Satz von Myhill und Nerode: Untere Schranken für die Anzahl der Zustände eines DFAs]

- Es sei L eine reguläre Sprache. Für jeden DFA

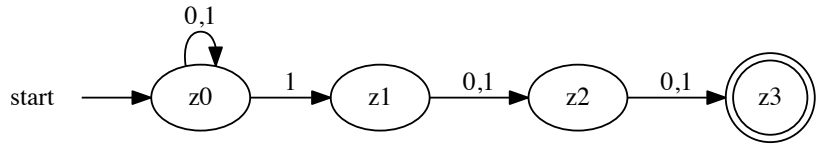
$$M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, E)$$

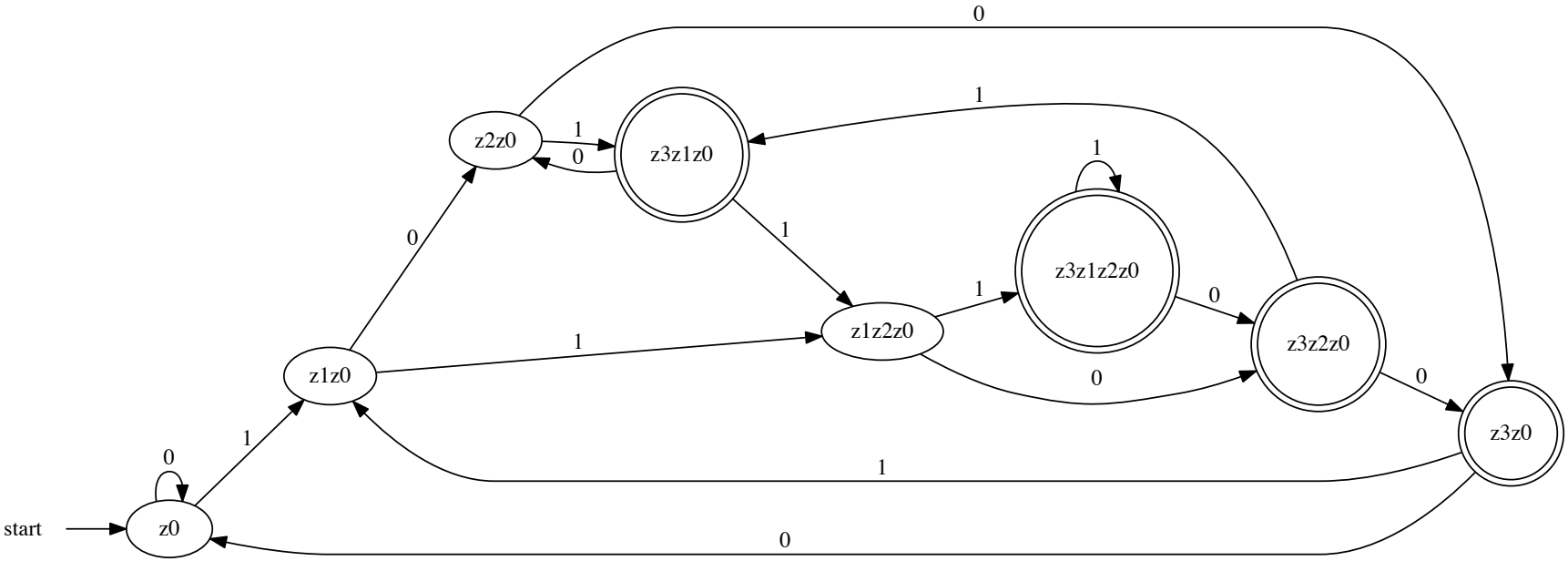
mit $L(M) = L$ gilt nach der „$(\Rightarrow)$“-Richtung im Beweis des Satzes von Myhill und Nerode:

$$\begin{aligned} \text{Index}(R_L) &\leq \text{Index}(R_M) \\ &= \text{Anzahl der in } M \text{ von } z_0 \text{ aus erreichbaren Zustände} \\ &\leq \|Z\|. \end{aligned}$$

Das heißt, M hat mindestens so viele Zustände wie R_L Äquivalenzklassen.

Erinnerung: L_3 : dritter Buchstabe von hinten ist 1: DFA versus NFA





Satz von Myhill und Nerode: Anwendungen

Beispiel: [Satz von Myhill und Nerode: Untere Schranken für die Anzahl der Zustände eines DFAs]

- Wir wenden dieses Ergebnis an, um eine untere Schranke für die Anzahl der Zustände der DFAs anzugeben, die die Sprache

$$\begin{aligned} L_n &= \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{ der } n\text{-te Buchstabe von hinten in } x \text{ ist } 1\} \\ &= \{x \in \{0,1\}^* \mid x = u1v \text{ mit } u \in \{0,1\}^* \text{ und } v \in \{0,1\}^{n-1}\}. \end{aligned}$$

  erkennen.
- Wir betrachten die Wörter aus $\{0,1\}^n$, d.h. die Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{0,1\}$.
- Es seien $u, v \in \{0,1\}^n$ mit $u \neq v$. Dann gibt es ein i, $1 \leq i \leq n$, so dass sich u und v an der Position i unterscheiden.

Satz von Myhill und Nerode: Anwendungen

Beispiel: [Satz von Myhill und Nerode: Untere Schranken für die Anzahl der Zustände eines DFAs]

- Wir nehmen o.B.d.A. an, dass u an der Position i eine 0 und v an der Position i eine 1 hat:

$$\begin{array}{rcccccccc|lcl} u & = & & & 0 & & & & & 0^{i-1} & \notin & L \\ v & = & & & 1 & & & & & 0^{i-1} & \in & L \\ & & 1 & 2 & \cdots & i & & \cdots & n & & & \end{array}$$

- Es gilt nun:
  - $u0^{i-1} \notin L$, da der n-te Buchstabe von hinten in $u0^{i-1}$ eine 0 ist, und
  - $v0^{i-1} \in L$, da der n-te Buchstabe von hinten in $v0^{i-1}$ eine 1 ist.

Satz von Myhill und Nerode: Anwendungen

Beispiel: [Satz von Myhill und Nerode: Untere Schranken für die Anzahl der Zustände eines DFAs]

- Somit sind u und v nicht äquivalent bezüglich R_{L_n}.
- Da u und v beliebig waren, sind alle Wörter aus $\{0,1\}^n$ nicht äquivalent bezüglich R_{L_n}, und es folgt:

$$\text{Index}(R_{L_n}) \geq 2^n.$$

- Somit hat jeder DFA für L_n mindestens 2^n Zustände. ❑

(Erinnerung: Es gibt einen NFA für L_n mit $n+2$ Zuständen.)

Erinnerung: L_8 : DFA versus NFA

Satz von Myhill und Nerode: Minimalautomaten

Definition (Minimalautomat)

Ein DFA M mit totaler Überführungsfunktion heißt *Minimalautomat*, falls es keinen zu M äquivalenten DFA mit totaler Überführungsfunktion und weniger Zuständen gibt.

Bemerkung: Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache.

- Der in der Rückrichtung im Beweis des Satzes von Myhill und Nerode bestimmte Äquivalenzklassen-Automat M_0 ist der DFA mit einer kleinstmöglichen Anzahl von Zuständen, der L akzeptiert.

Satz von Myhill und Nerode: Minimalautomaten

- Begründung:
  - die Anzahl der Zustände von M_0 ist gleich $\text{Index}(R_L)$ (Anzahl der Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation) und
  - für jeden DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, E)$ mit $L(M) = L = L(M_0)$ gilt nach der „$(\Rightarrow)$“-Richtung im Beweis des Satzes von Myhill und Nerode:

$$\begin{aligned} \text{Index}(R_L) &\leq \text{Index}(R_M) \\ &= \text{Anzahl der in } M \text{ von } z_0 \text{ aus erreichbaren Zustände} \\ &\leq \|Z\|. \end{aligned}$$

Folglich hat M_0 höchstens so viele Zustände wie M. ❑

Satz von Myhill und Nerode: Minimalautomaten

Bemerkung: Alle DFAs, die L akzeptieren und genau $\mathrm{Index}(R_L)$ Zustände haben, sind bis auf Umbenennung der Zustände äquivalent, d.h., Minimalautomaten sind (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.

Algorithmus Minimalautomat

Eingabe: DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ mit totaler Überführungsfunktion (d.h., $\delta(z, a)$ ist für alle $z \in Z$ und $a \in \Sigma$ definiert).

Ausgabe: Ein zu M äquivalenter Minimalautomat.

Algorithmus:

1. Entferne alle von z_0 nicht erreichbaren Zustände aus Z.
2. Erstelle eine Tabelle aller (ungeordneten) Zustandspaare $\{z, z'\}$ von M mit $z \neq z'$.
3. Markiere alle Paare $\{z, z'\}$ mit
$$z \in F \iff z' \notin F.$$
4. Sei $\{z, z'\}$ ein unmarkiertes Paar. Prüfe für jedes $a \in \Sigma$, ob $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ bereits markiert ist. Ist mindestens ein Test erfolgreich, so markiere auch $\{z, z'\}$.
5. Wiederhole Schritt 4, bis keine Änderung mehr eintritt.
6. Bilde maximale Mengen paarweise nicht disjunkter unmarkierter Zustandspaare und verschmelze jeweils alle Zustände einer Menge zu einem neuen Zustand.

Algorithmus Minimalautomat: Beispiel

Bemerkung: Der Algorithmus Minimalautomat kann mit einer Laufzeit von $O(\|Z\|^2)$ implementiert werden.

Beispiel: Minimalautomat zu gegebenem DFA.

Wir wollen einen Minimalautomaten zum DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ bestimmen, wobei

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{0, 1\} \\ Z &= \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\} \\ F &= \{z_3, z_4\} \end{aligned}$$

Überführungsfunktion δ					
Σ \ Z	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
0	z_1	z_3	z_4	z_3	z_4
1	z_2	z_3	z_4	z_3	z_4

Algorithmus Minimalautomat: Beispiel

(1.) Es sind alle Zustände von z_0 aus erreichbar.

(2.)+(3.) Markiere alle Paare $\{z, z'\}$ mit $z \in F \iff z' \notin F$:

	z_0	z_1	z_2	z_3
z_4	$\times$	$\times$	$\times$	
z_3	$\times$	$\times$	$\times$	
z_2				
z_1				

Algorithmus Minimalautomat: Beispiel

(4.)

- Da $\{\delta(z_0, 0), \delta(z_2, 0)\}$ markiert ist, wird $\{z_0, z_2\}$ markiert, und
- da $\{\delta(z_0, 0), \delta(z_1, 0)\}$ markiert ist, wird $\{z_0, z_1\}$ markiert:

	z_0	z_1	z_2	z_3
z_4	×	×	×	
z_3	×	×	×	
z_2	×			
z_1	×			

Algorithmus Minimalautomat: Beispiel

(5.) Es ergeben sich nun keine weiteren Änderungen mehr.

(6.) Wir können die Zustände z_1 und z_2 bzw. z_3 und z_4 zu einem Zustand z_{12} bzw. z_{34} zusammenfassen.

Damit erhalten wir einen zu M äquivalenten DFA $M' = (\Sigma, Z', \delta', z_0, F')$:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{0, 1\} \\ Z' &= \{z_0, z_{12}, z_{34}\} \\ F' &= \{z_{34}\} \end{aligned}$$

Überführungsfunktion δ'			
Z' \ Σ	z_0	z_{12}	z_{34}
0	z_{12}	z_{34}	z_{34}
1	z_{12}	z_{34}	z_{34}

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Definition

Seien Σ ein Alphabet und $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{P}(\Sigma^*)$ eine Sprachklasse über Σ.
$\mathcal{C}$ heißt *abgeschlossen unter*

- *Vereinigung*, falls $(\forall A, B \subseteq \Sigma^*)\,[(A \in \mathcal{C} \ \wedge \ B \in \mathcal{C}) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}]$;
- *Komplement*, falls $(\forall A \subseteq \Sigma^*)\,[A \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{C}]$;
- *Schnitt*, falls $(\forall A, B \subseteq \Sigma^*)\,[(A \in \mathcal{C} \ \wedge \ B \in \mathcal{C}) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}]$;
- *Differenz*, falls $(\forall A, B \subseteq \Sigma^*)\,[(A \in \mathcal{C} \ \wedge \ B \in \mathcal{C}) \Rightarrow A - B \in \mathcal{C}]$;
- *Konkatenation*, falls $(\forall A, B \subseteq \Sigma^*)\,[(A \in \mathcal{C} \ \wedge \ B \in \mathcal{C}) \Rightarrow AB \in \mathcal{C}]$;
- *Iteration* (*Kleene-Hülle*), falls $(\forall A \subseteq \Sigma^*)\,[A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^* \in \mathcal{C}]$;
- *Spiegelung*, falls $(\forall A \subseteq \Sigma^*)\,[A \in \mathcal{C} \Rightarrow sp(A) \in \mathcal{C}]$.

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Theorem

REG *ist unter allen in der obigen Definition angegebenen Operationen abgeschlossen.*

Behauptung:

1. Für jedes $n \geq 1$ ist die Sprache L'_n regulär:

$$\begin{aligned} L'_n &= \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{ der } n\text{-te Buchstabe in } x \text{ ist } 1\} \\ &= \{x \in \{0,1\}^* \mid x = u1v \text{ mit } u \in \{0,1\}^{n-1} \text{ und } v \in \{0,1\}^*\}. \end{aligned}$$

2. Die folgende Sprache ist nicht regulär:

$$\{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ enthält gleich viele 0en und 1en}\}.$$

Charakterisierungen regulärer Sprachen

Folgerung: Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Es gibt eine rechtslineare Grammatik G mit $L(G) = L$.
   (Form der Regeln: $A \to aB$ oder $A \to a$.)
2. Es gibt eine linkslineare Grammatik G mit $L(G) = L$.
   (Form der Regeln: $A \to Ba$ oder $A \to a$.)
3. Es gibt einen DFA M mit $L(M) = L$.
4. Es gibt einen NFA M mit $L(M) = L$.
5. Es gibt einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$.
6. Für die Myhill-Nerode-Relation R_L gilt: $\mathrm{Index}(R_L) < \infty$.