Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik

Blatt 12, Abgabe: 02.07.2019 bis 10:30 Uhr

Besprechung: 09. und 10.07.2019

Verantwortlich: Marc Neveling

Aufgabe 1: Partielle Rekursion

- (a) Sei die Funktion $eq : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben mit

$$eq(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie μeq .

- (b) Gegeben seien die partiell rekursiven Funktionen $kl : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $gr : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die wie folgt definiert sind:

$$kl(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } x > y \\ \text{undefiniert,} & \text{falls } x = y \end{cases} \quad gr(x, y) = \begin{cases} y, & \text{falls } x < y \\ x, & \text{falls } x > y \\ \text{undefiniert,} & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Welche Funktionen berechnen μkl und μgr ? Bitte geben Sie eine formale mathematische Beschreibung für μkl und μgr an.

- (c) Zeigen Sie, dass die Funktion $l : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$l(m) = \begin{cases} \log_2(m), & \text{falls } \log_2(m) \in \mathbb{N} \\ \text{undefiniert,} & \text{falls } \log_2(m) \notin \mathbb{N} \text{ oder } m = 0 \end{cases}$$

partiell rekursiv ist. Dafür dürfen Sie alle (aus der Vorlesung und den Übungen inklusive dieses Übungsblattes) bekannten primitiv rekursiven Funktionen direkt verwenden. Dass deren Komposition selbst primitiv rekursiv ist, müssen Sie jedoch mit dem Normalschema zeigen.

Aufgabe 2: Gödelisierung Typ-1-Grammatik

- (a) Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{a, b\}, \{X_0, X_1\}, X_0, P)$ mit

$$P = \{X_0 \rightarrow aX_0 \mid bX_1 \mid a, \\ X_1 \rightarrow bX_1 \mid b\}.$$

Geben Sie nach der in der Vorlesung behandelten Gödelisierung der Typ-1-Grammatiken das passende Gödelwort von G an.

- (b) Geben Sie zu folgendem Gödelwort einer Typ-1-Grammatik die passende Grammatik an:

$$ba^5bba^3bbabbabba^6bba^4bba^6bba^3bba^2bba^2bba^6bba^4bba^6bba^3bba^2b$$

Aufgabe 3: Typ-1-Wortproblem

Gegeben sei die kontextsensitive Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $N = \{S, A, B, C\}$ und

$$P = \{S \rightarrow SABC \mid ABC, \\ BA \rightarrow AB, \quad CB \rightarrow BC, \quad CA \rightarrow AC, \\ AA \rightarrow aa, \quad BB \rightarrow bb, \quad CC \rightarrow cc\}.$$

Der Algorithmus aus der Vorlesung für das Typ-1-Wortproblem wird nun für G und das Wort $w = aabbcc$ angewendet.

- (a) Geben Sie die Mengen T und T_1 jedem der ersten vier Schleifendurchläufe an.
(b) Wie oft wird die Schleife durchlaufen und was ist dann die Ausgabe des Algorithmus?
(c) Geben Sie $\chi_{L(G)}(w)$ an.

Aufgabe 4: Rekursive Aufzählbarkeit

Zeigen Sie aus Satz 10.14 der Vorlesung, dass RE abgeschlossen ist unter Vereinigung.