Prof. Dr. J. Rothe Düsseldorf, 18.06.2019

Übung zur Vorlesung
Theoretische Informatik

Blatt 11, Abgabe: 25.06.2019 bis 10:30 Uhr
Besprechung: 02. und 03.07.2019
Verantwortlich: Marc Neveling

Aufgabe 1: Primitive Rekursion
Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind. Verwenden Sie dafür das Normalschema aus Kapitel 9 der Vorlesung.

(a) die Vorgängerfunktion $V(x)$ (s. Kapitel 9)

(b) die modifizierte Differenz $\mathrm{md}(x, y)$ (s. Kapitel 9)

(c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mit $h(x) = x^2 + 1$

Aufgabe 2: Ackermann Funktion
Betrachten Sie die Ackermann-Funktion $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, die in Kapitel 9 der Vorlesung definiert ist.

(a) Füllen Sie die folgende Tabelle mit den Werten $\alpha(m, n)$, $0 \leq m \leq 3$, $0 \leq n \leq 4$, der Ackermann-Funktion.

m \ n	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					

(b) Zeigen Sie, dass $\alpha_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\alpha_2(n) = \alpha(2, n)$ LOOP-berechenbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\alpha_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\alpha_3(n) = \alpha(3, n)$ LOOP-berechenbar ist.

Aufgabe 3: Gödelisierung

(a) Eine primitiv rekursive Funktion φ wurde entsprechend der Gödelisierung von $\mathbb{P}\mathrm{r}$ in Kapitel 9 der Vorlesung in das folgende Gödelwort umgewandelt, wobei $G(\text{add})$ ein Platzhalter für die aus der Vorlesung bekannte Gödelisierung der Additionsfunktion $\text{add}(x, y) = x + y$ ist:

$$\mathrm{PR}[0, \mathrm{SUB}[G(\text{add}); \mathrm{id}||| * ||, \mathrm{id}||| * |||](x|, x||, x|||)](x|, x||)$$

Welche Funktion versteckt sich hinter φ? Verwenden Sie das Normalschema für primitiv rekursive Funktionen, um φ exakt aus dem Gödelwort zu "dekodieren" und ausdrücklich anzugeben.

(b) Geben Sie für die in der Vorlesung definierte primitiv rekursive Funktion $\exp(y, x) = x^y$ das zugehörige Gödelwort an. Achten Sie dabei auf formale Korrektheit. Sie dürfen das Gödelwort einer Funktion f, die als primitiv rekursiv bekannt ist, mit $G(f)$ angeben und müssen es nicht ausschreiben.

Aufgabe 4: Partielle Rekursion

Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$g(m) = \begin{cases} \sqrt{m} & \text{falls } \sqrt{m} \in \mathbb{N} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

partiell rekursiv ist.

(a) Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(n, m) = |n^2 - m|$ primitiv rekursiv ist.

(b) Zeigen Sie nun, dass $\mu f = g$ gilt.