Prof. Dr. J. Rothe Düsseldorf, 21.05.2019

Übung zur Vorlesung
Theoretische Informatik
Blatt 8, Abgabe: 28.05.2019 bis 10:30 Uhr
Besprechung: 04. und 05.06.2019
Verantwortlich: Marc Neveling

Aufgabe 1: Kontextfreie Sprachen
Zeigen Sie mit einem Verfahren Ihrer Wahl, ob die folgenden Spachen kontextfrei sind oder nicht.

(a) $L_1 = \{a^n bcba^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

(b) $L_2 = \{0^n 1^m 2^{n+m} \mid m, n \geq 1\} \subseteq \{0, 1, 2\}^*$

(c) $L_3 = \{a^m b^{2^k} \mid m, k \geq 1\} \subseteq \{a, b\}^*$

Aufgabe 2: Kellerautomat und kontextfreie Grammatik

(a) Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b\}, N = \{S, A, X\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{S &\to AX \mid b, \\ X &\to SA, \\ A &\to a\}. \end{aligned}$$

Geben Sie einen Kellerautomaten M mit $L(M) = L(G)$ an. Verwenden Sie dabei in jedem Schritt die Konstruktion aus der Vorlesung.

(b) Gegeben sei der Kellerautomat $M = (\{a, b\}, \Gamma, Z, \delta, z_0, \#)$ mit $\Gamma = \{A, \#\}, Z = \{z_0, z_1\}$ und der folgenden Überführungsfunktion δ:

$$\begin{aligned} &z_0 a\# \to z_0 A\#, \quad z_1 \lambda \# \to z_1 \lambda, \\ &z_0 aA \to z_0 AA, \quad z_1 bA \to z_1 \lambda, \\ &z_0 bA \to z_1 \lambda. \end{aligned}$$

Konstruieren Sie nach dem Verfahren aus der Vorlesung eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L(M)$. Geben Sie alle relevanten Zwischenschritte an.

Aufgabe 3: DPDA vs PDA
Gegeben sei der DPDA $M = (\{a, b\}, \{A, \#\}, \{z_0, z_1, z_2, z_e\}, \delta, z_0, \#, \{z_0, z_1, z_2\})$ und δ wie folgt:

$z_0 a\# \to z_1\#$	$z_1 a\# \to z_1 A\#$	$z_1 aA \to z_1 AA$	
$z_1 b\# \to z_e \lambda$	$z_1 bA \to z_2 \lambda$	$z_2 b\# \to z_e \lambda$	$z_2 bA \to z_2 \lambda$

(a) Wandeln Sie M in einen PDA M' um, sodass $L(M) = L(M')$. Begründen Sie, warum beide Automaten äquivalent sind.

(b) Geben Sie für $w_1 = aaabb \in L(M)$ eine akzeptierende Konfigurationenfolge sowohl in M als auch in M' an.

(c) Geben Sie für $w_2 = aabb \notin L(M)$ alle möglichen Konfigurationenfolgen sowohl in M als auch in M' an.

(d) Geben Sie $L(M)$ formal als Menge von Wörtern an, ohne weiteren Bezug auf M oder M' zu nehmen.

Aufgabe 4: REG $\subset$ DCF
Satz 4.6 aus dem Vorlesungsskript besagt unter anderem, dass REG $\subset$ DCF gilt. In dieser Aufgabe soll die Ungleichheit von REG und DCF nachvollzogen werden.

(a) Führen Sie dazu den ersten Teil der Beweisskizze aus, indem Sie einen DPDA M angeben, für den $L(M) = L = \{w \,\$\, sp(w) \mid w \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b, \$\}^*$ gilt. Erklären Sie dabei kurz die Funktionsweise Ihres Automaten.

(b) Zeigen Sie dann mit Hilfe des Satzes von Myhill und Nerode, dass $L \notin$ REG gilt.

(c) Bestimmen Sie das größte i, so dass die Sprache $\overline{L}$ zu der Klasse $\mathcal{L}_i$ der Chomsky-Hierarchie gehört und beweisen Sie Ihre Aussage.