Prof. Dr. J. Rothe Düsseldorf, 02.04.2019

# Übung zur Vorlesung
# Theoretische Informatik

Blatt 1, Abgabe: 09.04.2019 bis 10:30 Uhr
Besprechung: 16. und 17.04.2019
Verantwortlich: Marc Neveling

## Aufgabe 1: Dänen lügen nicht! Oder doch?

In der kleinen dänischen Stadt Logibørg leben die drei Geschwister Astrid, Bjarne und Caja. Da alle drei vom berühmten Logiker Alfred Quant-Thor abstammen, sagt jeder von ihnen entweder immer die Wahrheit oder lügt immer. Die Geschwister kennen sich schon ein Leben lang und wissen daher genau, welcher von ihnen ein Lügner ist oder wer ehrlich. In einer geselligen Runde mit reichlich Met fallen die folgenden Aussagen der drei Geschwister [1]:

(a) Astrid sagt, dass Bjarne immer lügt.

(b) Bjarne sagt, dass Caja immer lügt.

(c) Caja sagt, dass sowohl Astrid als auch Bjarne immer lügen.

Finden Sie heraus, welche die Lügner und welche die Ehrlichen sind, indem Sie eine Wahrheitstabelle aufstellen und nach Widersprüchen in den Aussagen suchen.

## Aufgabe 2: Prädikatenlogik

Negieren Sie die folgenden Aussagen, wobei keine Negation für Quantoren verwendet werden soll. Sei beispielsweise die Aussage „Es gibt eine rothaarige Person im Raum.“ gegeben, soll sie nicht zu „Es gibt keine rothaarige Person im Raum.“ sondern etwa zu „Alle Personen im Raum haben keine roten Haare.“ negiert werden. Verwenden Sie für das Verschieben von Negationen in Quantoren die folgenden Regeln:

$$\neg\forall x : \varphi(x) \iff \exists x : \neg\varphi(x) \qquad \text{und} \qquad \neg\exists x : \varphi(x) \iff \forall x : \neg\varphi(x).$$

Sei $L$ eine Menge und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl (in dieser Veranstaltung können Sie im Allgemeinen davon ausgehen, dass $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ gilt).

(a) Alle Personen im Raum haben braune Haare.

[1] Alle Personen und Orte in dieser Geschichte sind frei erfunden.

(b) Für alle Personen mit braunen Haaren im Raum existiert ein Tanz, welchen sie tanzen können.

(c) Für alle Elemente $a \in L$ gilt $a \leq n - 2$.

(d) Für alle Elemente $a \in L$ mit $a \leq n - 2$ existieren $b, c \in \mathbb{N}$ mit $a = b + c$ und $b \leq 3$.

(e) Für alle Elemente $a \in L$ mit $a \leq n - 2$ existieren $b, c, d \in \mathbb{N}$ mit $a = b + c + d$, $b \leq 3$ und $d + c \geq 1$, so dass für alle $i \geq 0$ gilt, dass $b + (i \cdot c) + d \in L$.

**Aufgabe 3: Relationen**

Sei $R \subseteq S \times T$ eine Relation auf $S$ und $T$.

a) Geben Sie $R_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, durch Aufzählung aller enthaltenen Elemente an:

   (i) $S = T = \{\text{Hund}, \text{Katze}, \text{Maus}, \text{Vogel}\}$, $(a, b) \in R_1 \Leftrightarrow |b| > |a|$, wobei hier $|x|$ definiert sei als die Anzahl der Ziffern und Buchstaben im Wort $x$.

   (ii) $S = T = \{2, 3, 4, 5\}$, $(a, b) \in R_2 \Leftrightarrow$ *(a und b sind beide Primzahlen) oder (a und b sind beide keine Primzahlen).*

   (iii) $S = \{7520, 23, false, \{4214, 4454\}, \emptyset\}$, $T = \{\text{Menge}, \text{Zahl}, \text{ungerade Zahl}, \text{Boolean}\}$, $(a, b) \in R_3 \Leftrightarrow$ *a ist vom Typ b.*

   (iv) $S = T = \{\text{Lager, Ebbe, Reittier, Regal, Lampe, Palme, Ampel, Kajak}\}$, $(a, b) \in R_4 \Leftrightarrow$ *a ist rückwärts geschrieben das gleiche wie b (Groß- und Kleinschreibung ist egal).*

b) Welche der Relationen $R_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, aus Aufgabenteil (a) sind wohldefiniert auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Sie dürfen annehmen, dass eine natürliche Zahl keine führenden Nullen hat.

**Aufgabe 4: Mengen**

Seien $A, B, C$ und $D$ beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$$

Was müsste noch gezeigt werden, damit $(A \cap C) \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (C \cup D)$ gilt? Zeigen oder widerlegen Sie, dass diese Gleichheit gilt.