Übung zur Vorlesung
Kryptokomplexität II

Bearbeitungszeit: 11. Juni bis 21. Juni
Verantwortlich: Roman Zorn

Begründen Sie Ihre Antworten und bereiten Sie sie so vor, dass Sie sie in der Übung präsentieren können.

Aufgabe 1: MULTIPROCESSOR JOB SCHEDULING

Betrachten Sie das in der Vorlesung definierte Entscheidungsproblem MULTIPROCESSOR JOB SCHEDULING.

MULTIPROCESSOR JOB SCHEDULING	
Gegeben:	Eine Liste von Jobs $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$, wobei Job j_i die Länge l_i hat, m Prozessoren und eine Schranke t.
Frage:	Ist es möglich, alle Jobs ohne Überlappungen auf die Prozessoren aufzuteilen, so dass die Gesamtlaufzeit alle Jobs abzuarbeiten höchstens t ist?

(a) ▶ Betrachten Sie die Liste von Jobs $J = (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6, j_7)$ mit den Joblängen $l_1 = 2,\ l_2 = 1,\ l_3 = 4,\ l_4 = 4,\ l_5 = 1, l_6 = 4$ und $l_7 = 5$. Es gibt $m = 3$ Prozessoren. Entscheiden Sie jeweils für die Schranken $t_1 = 6, t_2 = 7$ und $t_3 = 8$, ob die Instanzen $\langle J, m, t_i \rangle$ in MULTIPROCESSOR JOB SCHEDULING liegen. Falls ja, geben Sie eine Belegung der Prozessoren an, falls nein, begründen Sie.

(b) ▶ Zeigen Sie, dass das Problem MULTIPROCESSOR JOB SCHEDULING in NP liegt.

(c) ▶ Nehmen Sie an, man könnte die Jobs beliebig zerteilen, das heißt, ein Job der Länge 7 könnte zum Beispiel in zwei neue Jobs der Länge 1 und 6 aufgeteilt werden. Was ändert sich bezüglich der Komplexität des Problems?

Aufgabe 2: Dominierende Menge und Knotenüberdeckung

Sei G ein ungerichteter Graph.

(a) ▶ Zeigen Sie, dass eine Knotenüberdeckung von G im Allgemeinen keine dominierende Menge in G sein muss.

(b) ▶ Ist das Komplement einer minimalen dominierenden Menge in G immer auch eine dominierende Menge?

(c) ▶ Zeigen Sie, dass eine dominierende Menge in G im Allgemeinen keine Knotenüberdeckung von G sein muss.

(d) ▶ Geben Sie eine VertexCover-Instanz (H, k') an, bei der H zusammenhängend ist und $|V(H)| \geq 3$ gilt, und begründen Sie mit ihr, weshalb die folgende Reduktion h von VertexCover auf DominatingSet fehlschlägt:

$$h(G, k) = (G, k).$$

Aufgabe 3: VertexCover $\leq_m^p$ DominatingSet

▶ Zeigen Sie mit einer direkten Reduktion

$$\text{VertexCover} \leq_m^p \text{DominatingSet}.$$

Aufgabe 4: Knotenfärbungen

(a) ▶ Sei $d \geq 3$ ein maximaler Knotengrad von dem zusammenhängenden Graph G. Kann G immer mit d oder weniger Farben gefärbt werden?

(b) ▶ Geben Sie ein Beispiel von einem Graph an, der vierfärbbar, aber nicht dreifärbbar ist.

(c) ▶ Zeigen Sie mit einer Many-One-Reduktion

$$\text{3-Colorability} \leq_m^p \text{4-Colorability}.$$