Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: 02, Raum: 26
Tel.: +49 211 8112188
E-Mail: rothe@hhu.de

22. Dezember 2022

**Vorlesung im Wintersemester 2022/2023**

# Probeklausur Algorithmische Spieltheorie

**17. Januar 2023**

**Die Klausuraufgaben selbst können zwar den Aufgaben in der Probeklausur ähnlich sein, müssen aber nicht! Der Umfang der Probeklausur entspricht nicht notwendigerweise dem Umfang der Klausur! Die Probeklausur ist angelehnt an die Nachklausur zur Algorithmischen Spieltheorie vom Wintersemester 2015/2016.**

**Name, Vorname:**

**Studienfach, Semester:**

**Matrikelnummer:**

**Anzahl der abgegebenen Blätter, inklusive Aufgabenblätter:**

**Erlaubte Hilfsmittel:**

- Vorlesungsmitschriften, Bücher, Übungsblätter,
- Gedächtnis.

**Nicht erlaubte Hilfsmittel:**

- Mobiltelefone und ähnliche Kommunikationsgeräte,
- Kommiliton/inn/en,
- Taschenrechner.

**Achten Sie darauf, dass Ihre Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und eindeutig sind!**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Gesamt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punktzahl | 20 | 25 | 15 | 15 | 15 | 10 + 10 (Bonus) | 100 + 10 |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | |

**Aufgabe 1 (20 Punkte)** *Multiple Choice*

Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder „Ja“ oder „Nein“ an.

**Bewertung:** Bezeichnet $\#R$ die Anzahl der von Ihnen richtig angekreuzten Antworten und $\#K$ die Anzahl der von Ihnen insgesamt angekreuzten Antworten (d. h. nur solche, bei denen *entweder „Ja“ oder „Nein“* angekreuzt wurde – Antworten, bei denen weder „Ja“ noch „Nein“ oder sowohl „Ja“ als auch „Nein“ angekreuzt wurde, zählen nicht zu $\#K$), so ergibt sich die folgende Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe:

$$\#R + \left\lfloor \frac{5 \cdot \#R}{\#K} \right\rfloor \text{ Punkte, falls } \#K > 0, \text{ und } 0 \text{ Punkte, falls } \#K = 0.$$

**(a)** Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☒ Nein In einem nichtkooperativen Spiel in Normalform ist ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien stets ein Pareto-optimales Strategieprofil.

☐ Ja ☒ Nein In der „Schlacht der Geschlechter“ gibt es ein striktes (also eindeutiges) Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

☒ Ja ☐ Nein In der „Schlacht der Geschlechter“ sind alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien Pareto-Optima und umgekehrt.

**(b)** Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☒ Ja ☐ Nein In einem nichtkooperativen Spiel in Normalform gibt es stets mindestens ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

☐ Ja ☒ Nein Im Gefangenendilemma gibt es mehr Nash-Gleichgewichte in gemischten als in reinen Strategien.

☒ Ja ☐ Nein Jeder 3-Simplex hat sechs 1-Flächen und vier 2-Flächen.

**(c)** Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

☐ Ja ☒ Nein Es kann in deterministischer Polynomialzeit entschieden werden, ob Spieler 1 im Spiel GEOGRAPHY keine Gewinnstrategie hat.

☒ Ja ☐ Nein Bei Tic-Tac-Toe kann man ein Unentschieden stets erzwingen.

☒ Ja ☐ Nein Das 3-*player majority game* $G = (P, v)$ (definiert durch $P = \{1, 2, 3\}$ und $v(C) = 1$, falls $\|C\| \geq 2$, und $v(C) = 0$ sonst) ist superadditiv.

**(d)** Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☒ Ja ☐ Nein Konvexe kooperative Spiele haben stets einen nicht leeren Kern.

☒ Ja ☐ Nein Jedes Teilspiel eines konvexen kooperativen Spiels hat einen nicht leeren Kern.

☐ Ja ☒ Nein Nicht konvexe kooperative Spiele haben stets einen leeren Kern.

**(e)** Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☒ Nein Ein einfaches superadditives Spiel hat genau dann einen nicht leeren Kern, wenn es keinen Veto-Spieler hat.

☒ Ja ☐ Nein Man kann in deterministischer Polynomialzeit entscheiden, ob ein gegebener Spieler in einem gegebenen gewichteten Wahlspiel (in dem die große Koalition gewinnt) ein Veto-Spieler ist.

☒ Ja ☐ Nein Hat ein Spieler in einem monotonen kooperativen Spiel den Shapley-Wert $0$, so muss er ein Dummy-Spieler sein.

**Aufgabe 2 (25 Punkte)** *Lösungskonzepte in nichtkooperativen Spielen*

Betrachten Sie das nichtkooperative Spiel in Normalform mit der Spielermenge $P = \{1, 2\}$, der Menge der Strategieprofile $\mathscr{S} = S_1 \times S_2$, wobei $S_i = \{a, b, c, d, e, f\}$ für $i \in \{1, 2\}$, und den folgenden Gewinnfunktionen:

| | | Spieler 2 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
| Spieler 1 | $a$ | $(1, 4)$ | $(2, 3)$ | $(2, 4)$ | $(3, -1)$ | $(2, -1)$ | $(-2, 4)$ |
| | $b$ | $(1, 4)$ | $(3, 2)$ | $(-1, 3)$ | $(1, -3)$ | $(2, 4)$ | $(4, 3)$ |
| | $c$ | $(-4, 1)$ | $(3, 2)$ | $(1, 2)$ | $(-1, 4)$ | $(-3, 2)$ | $(-2, 1)$ |
| | $d$ | $(3, 4)$ | $(-3, 2)$ | $(-2, 1)$ | $(1, -3)$ | $(1, 1)$ | $(3, 4)$ |
| | $e$ | $(4, 4)$ | $(1, 3)$ | $(1, 3)$ | $(3, 3)$ | $(2, -2)$ | $(-1, 1)$ |
| | $f$ | $(1, 3)$ | $(2, 2)$ | $(2, 3)$ | $(1, -3)$ | $(1, -1)$ | $(3, -3)$ |

**(a)** Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien und alle besten Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien. Begründen Sie jeweils, warum es sich um ein Nash-Gleichgewicht bzw. ein bestes Nash-Gleichgewicht handelt.

**(b)** Betrachten Sie die Einschränkung dieses Spiels auf die Strategiemengen $S_1' = \{a, b\}$ und $S_2' = \{a, b\}$ und bestimmen Sie alle Pareto-optimalen Strategieprofile und alle dominanten Strategien in dem eingeschränkten Spiel. (Zur Begründung der Pareto-Optimalität eines Strategieprofils kann eine grafische Veranschaulichung verwendet werden, wenn diese ausführlich erläutert wird.)

**(c)** Betrachten Sie die Einschränkung dieses Spiels auf die Strategiemengen $S_1'' = \{e, f\}$ und $S_2'' = \{e, f\}$ und bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien. Argumentieren Sie kurz, warum es keine weiteren als die angegebenen Nash-Gleichgewichte gibt.

**(d)** Betrachten Sie die Einschränkung dieses Spiels auf die Strategiemengen $S_1'' = \{e, f\}$ und $S_2'' = \{e, f\}$ und bestimmen Sie die Minmax-Strategie von Spieler 2 gegen Spieler 1 und den Minmax-Wert für Spieler 1.

**(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an und begründen Sie Ihre Antworten!)**

**(a)** **(5 Punkte)** Markiere jeweils den maximalen Gewinn von Spieler 1 in jeder Spalte und den maximalen Gewinn von Spieler 2 in jeder Zeile:

| | | Spieler 2 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
| Spieler 1 | $a$ | (1, **4**) | (2, 3) | (**2**, **4**) | (**3**, −1) | (**2**, −1) | (−2, **4**) |
| | $b$ | (1, **4**) | (**3**, 2) | (−1, 3) | (1, −3) | (**2**, **4**) | (**4**, 3) |
| | $c$ | (−4, 1) | (**3**, 2) | (1, 2) | (−1, **4**) | (−3, 2) | (−2, 1) |
| | $d$ | (3, **4**) | (−3, 2) | (−2, 1) | (1, −3) | (1, 1) | (3, **4**) |
| | $e$ | (**4**, **4**) | (1, 3) | (1, 3) | (**3**, 3) | (**2**, −2) | (−1, 1) |
| | $f$ | (1, **3**) | (2, 2) | (**2**, **3**) | (1, −3) | (1, −1) | (3, −3) |

In dem Spiel gibt es vier Nash-Gleichgewichte: $(a, c), (b, e), (e, a), (f, c)$. Die maximale Gewinnsumme ist 8, also ist $(e, a)$ das einzige beste Nash-Gleichgewicht.

Punktespiegel:

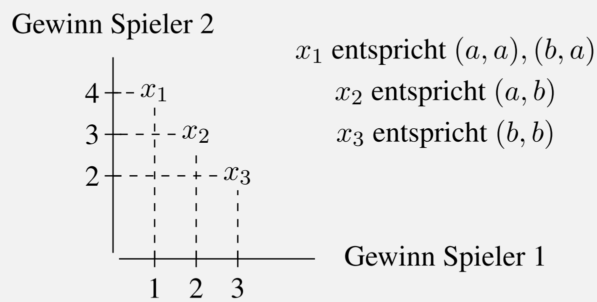
- Alle korrekten NEs (und keine falschen NEs) angegeben (2)
- NEs begründet (1)
- Bestes NE korrekt angegeben (1)
- Bestes NE korrekt begründet (1)

**(b) (5 Punkte)**

Das eingeschränkte Spiel ist gegeben durch

| | | Spieler 2 | |
|---|---|---|---|
| | | $a$ | $b$ |
| Spieler 1 | $a$ | $(1,4)$ | $(2,3)$ |
| | $b$ | $(1,4)$ | $(3,2)$ |

In diesem Spiel sind alle Strategieprofile Pareto-optimal, da keines der Profile vollständig im Rechteck eines anderen Strategieprofils enthalten ist.




Spieler 1 hat $b$ als dominante Strategie, da: Wenn Spieler 2 Strategie $a$ spielt, bekommt Spieler 1 den gleichen Gewinn für das Spielen von $a$ und $b$ und wenn Spieler 2 Strategie $b$ spielt, Spieler 1 durch das Spielen von $b$ einen höheren Gewinn erzielt.

Spieler 2 hat $a$ als dominante Strategie, da: Wenn Spieler 1 Strategie $a$ spielt, das Spielen von $a$ für Spieler 2 einen höheren Gewinn bringt und auch wenn Spieler 1 Strategie $b$ spielt, Spieler 2 mit Strategie $a$ einen höheren Gewinn erhält.

Punktespiegel:

- alle P.-optimalen Profile richtig nennen (1)
- Begründung (2)
- alle dominanten Strategien richtig benennen (1)
- Begründung (1)

**(c) (10 Punkte)**

Das eingeschränkte Spiel ist gegeben durch

| | | Spieler 2 | |
|---|---|---|---|
| | | $e$ | $f$ |
| Spieler 1 | $e$ | $(2,-2)$ | $(-1,1)$ |
| | $f$ | $(1,-1)$ | $(3,-3)$ |

Es gibt keine Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien (siehe Markierungen in der Tabelle).

Es seien $p$ die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler $1$ Strategie $e$ spielt, und $q$ die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler $2$ Strategie $e$ spielt. Wir betrachten die Indifferenzgleichungen

$G_1((1,0),(q,1-q)) = G_1((0,1),(q,1-q))$ und $G_2((p,1-p),(1,0)) = G_2((p,1-p),(0,1))$,

also

$$\begin{aligned} & 2q + (-1)(1-q) = 1q + 3(1-q) \\ \iff\quad & 2q - 1 + q = 1q + 3 - 3q \\ \iff\quad & 5q = 4 \\ \iff\quad & q = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & -2p + (-1)(1-p) = 1p + (-3)(1-p) \\ \iff\quad & -2p - 1 + p = p - 3 + 3p \\ \iff\quad & 2 = 5p \\ \iff\quad & p = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien ist also $\pi^* = ((2/5, 3/5), (4/5, 1/5))$.

Es gibt keine weiteren Nash-Gleichgewichte.
Begründung etwa durch Nutzen von Aussagen aus den Übungen: Geraden schneiden sich hier in genau einem Punkt; man findet mit den Methoden aus Aufgabenteil (a) kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Punktespiegel

- Korrekt angegeben, dass es keine NEs in reinen Strategien gibt (1)
- Indifferenzgleichungen aufstellen (3)
- Indifferenzgleichungen auflösen (5)
- NG korrekt angeben (1)

**(d) (5 Punkte)**

1. Möglichkeit: Da das eingeschränkte Spiel ein Nullsummenspiel ist, gilt nach dem Maximin-Theorem (bekannt aus der Vorlesung), dass die Minmax-Strategie von Spieler 2 gegen Spieler 1 gleich der Strategie von Spieler 2 im Nash-Gleichgewicht ist, also $(4/5, 1/5)$. Der zugehörige Wert für Spieler 1 $G_1(\pi^*) = G_1((1,0),(4/5,1/5)) = \frac{7}{5}$. (Die erste Gleichheit ist dabei aus Vorlesung und Übungen bekannt.)

2. Möglichkeit: Mit Hilfe der aus den Übungen bekannten Formel

$$\begin{aligned}\min_{\pi_2\in\Pi_2}\max_{\pi_1\in\Pi_1} G_1(\pi_1,\pi_2) &= \min_{0\le q\le 1}\max\{(x_3-x_4)q+x_4,(x_1-x_2)q+x_2\}\\ &= \min_{0\le q\le 1}\max\{(1-3)q+3,(2+1)q-1\}\\ &= \min_{0\le q\le 1}\max\{-2q+3,3q-1\}\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & -2q+3 \ge 3q-1\\ \iff\quad & 4\ge 5q\\ \iff\quad & \frac{4}{5}\ge q\end{aligned}$$

Also ist $-2q+3$ für $q\in[0,\frac{4}{5}]$ maximal und $3q-1$ für $q\in[\frac{4}{5},1]$ maximal.

$$\min_{\pi_2\in\Pi_2}\max_{\pi_1\in\Pi_1} G_1(\pi_1,\pi_2) = \min_{0\le q\le 1}\{\min_{q\in[0,\frac{4}{5}]}\{-2q+3\},\min_{q\in[\frac{4}{5},1]}\{3q-1\}\}$$

Die Minmax Strategie von Spieler 2 gegen Spieler 1 ist

$$\arg\min_{\pi_2\in\Pi_2}\max_{\pi_1\in\Pi_1} G_1(\pi_1,\pi_2) = \arg\min_{0\le q\le 1}\{\min_{q\in[0,\frac{4}{5}]}\{-2q+3\},\min_{q\in[\frac{4}{5},1]}\{3q-1\}\}$$

Auf den gegebenen Intervallen sind beide Funktionen jeweils bei $\frac{4}{5}$ minimal. Also ist die Minmax-Strategie von Spieler 1 $(\frac{4}{5},\frac{1}{5})$.
Damit berechnet sich der Minmax-Wert von Spieler 2 gegen Spieler 1:

$$-2\cdot\frac{4}{5}+\frac{15}{5} = -\frac{8}{5}+\frac{15}{5} = \frac{7}{5}$$

Punktespiegel:

- MinMax-Strategie richtig angegeben (1)
- MinMax-Wert richtig angegeben (1)
- richtige und vollständige Begründung/Rechenweg über NEs oder Formel (3)

**Aufgabe 3 (15 Punkte)** *Eigenschaften in nichtkooperativen Spielen*

Gegeben sei ein nichtkooperatives Spiel in Normalform mit zwei Spielern und je zwei Strategien pro Spieler, in dem alle Strategieprofile Pareto-optimal sind. Zeigen Sie, dass, wenn es in solch einem Spiel zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien gibt, beide Spieler mindestens eine dominante Strategie haben.

**(Bitte argumentieren Sie formal über die Gewinnfunktion und achten Sie darauf, dass Ihre Argumentation vollständig und verständlich ist!)**

Betrachte das folgende allgemeine Zwei-Personen-Spiel in Normalform:

| | | Spieler 2 | |
|---|---|---|---|
| | | $a$ | $b$ |
| Spieler 1 | $a$ | $(x_1, y_1)$ | $(x_2, y_2)$ |
| | $b$ | $(x_3, y_3)$ | $(x_4, y_4)$ |

Vorabbemerkung: Für eine dominante Strategie für Spieler 1 muss $x_1$ mit $x_3$ verglichen werden und $x_2$ mit $x_4$. Für eine dominante Strategie für Spieler 2 muss $y_1$ mit $y_2$ verglichen werden und $y_3$ mit $y_4$.

Wir nehmen an, dass alle Strategieprofile in diesem Spiel Pareto-optimal sind.

Angenommen, es gibt zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien in dem Spiel und sei o.E. eines davon $(a, a)$ (sonst umbenennen). Dann gilt

$$x_1 \geq x_3 \tag{1}$$
$$y_1 \geq y_2 \tag{2}$$

Da $(a, b)$ Pareto-optimal ist, muss folgendes gelten (sonst würde $(a, b)$ von $(a, a)$ Pareto-dominiert):

$$x_2 \geq x_1. \tag{3}$$

Analog muss für die Pareto-Optimalität von $(b, a)$ gelten:

$$y_3 \geq y_1. \tag{4}$$

Wir unterscheiden nun die verschiedenen Fälle für das zweite Nash-Gleichgewicht.

**Fall 1:** $(a, b)$ sei ein zweites Nash-Gleichgewicht. Dann gilt

$$x_2 \geq x_4 \tag{5}$$
$$y_2 \geq y_1 \tag{6}$$

Mit (2) und (6) folgt

$$y_1 = y_2 \tag{7}$$

Damit nun $(a, a)$ Pareto-optimal ist, muss $x_1 = x_2$ gelten.

Insgesamt haben wir also $x_1 = x_2 \geq x_3$ und $x_1 = x_2 \geq x_4$, damit ist $a$ eine dominante Strategie für Spieler 1.

Wegen (5) muss für die Pareto-Optimalität von $(b, b)$ gelten, dass $y_4 \geq y_2$. Also haben wir insgesamt $y_4 \geq y_2 = y_1$. Wenn nun $x_3 \geq x_4$ gilt, muss für die Pareto-Optimalität von $(b, b)$ gelten, dass $y_4 \geq y_3$. Damit wäre $b$ eine dominante Strategie für Spieler 2. Gilt hingegen $x_4 \geq x_3$, so muss für die Pareto-Optimalität von $(b, b)$ gelten, dass $y_3 \geq y_4$. Damit wäre $a$ eine dominante Strategie für Spieler 2. In beiden Fällen hat auch Spieler 2 eine dominante Strategie.

**Fall 2:** Hier kann mit Symmetrie zu Fall 1 argumentiert werden.

Alternativ: $(b, a)$ sei ein zweites Nash-Gleichgewicht. Dann gilt

$$x_3 \geq x_1 \tag{8}$$
$$y_3 \geq y_4 \tag{9}$$

Mit (2) ist damit $a$ eine dominante Strategie für Spieler 2.

Mit (1) folgt aus (8)

$$x_1 = x_3 \tag{10}$$

Angenommen, $x_2 \geq x_4$ gilt, so ist $a$ eine dominante Strategie für Spieler 1. Andernfalls ist $b$ eine dominante Strategie für Spieler 1. In beiden Fällen hat also auch Spieler 1 eine dominante Strategie.

**Fall 3:** $(b, b)$ sei ein zweites Nash-Gleichgewicht. Dann gilt

$$x_4 \geq x_2 \tag{11}$$
$$y_4 \geq y_3 \tag{12}$$

Damit $(a, b)$ trotz (11) Pareto-optimal ist, muss $y_1 \geq y_4$ gelten. Mit (2) und (4) folgt dann $y_1 \geq y_4 \geq y_3 \geq y_1$, also ist $y_1 = y_3 = y_4$. Zusammen mit (2) ist also $a$ eine dominante Strategie für Spieler 2.

Aus (12) folgt, dass $x_3 \geq x_4$ gelten muss, da $(b, a)$ sonst nicht Pareto-optimal wäre. Damit und mit (11), (1) und (3) gilt $x_4 \geq x_2 \geq x_1 \geq x_3 \geq x_4$. Also sind $a$ und $b$ dominante Strategien für Spieler 1.

Punktespiegel:

- Beweis vollständig (10)
- Formal korrekt (5)

**Aufgabe 4 (15 Punkte)** *Koalitionsstrukturen und Superadditivität*

Betrachten Sie das kooperative Spiel mit übertragbarem Nutzen $G = (P, v)$ mit $P = \{1, 2, 3\}$ und $v$ wie in der folgenden Tabelle angegeben:

| $C$ | $\emptyset$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(C)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

**(a)** Bestimmen Sie alle möglichen Ausgänge (d. h. Ergebnisse der Form (Koalitionsstruktur, Auszahlungsvektor)) dieses Spiels, die die soziale Wohlfahrt maximieren. Beschränken Sie sich dabei auf Auszahlungsvektoren, die ganzzahlig, effizient und individuell rational sind.

**(b)** Zeigen Sie, dass das Spiel nicht superadditiv ist.

**(c)** Bestimmen Sie die superadditive Überdeckung des Spiels.

**(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an und begründen Sie Ihre Antworten!)**

**(a)** **(5 Punkte)** Bei drei Spielern gibt es fünf mögliche Koalitionsstrukturen:

$$\mathfrak{C}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \mathfrak{C}_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \mathfrak{C}_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\},$$
$$\mathfrak{C}_4 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \mathfrak{C}_5 = \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Die soziale Wohlfahrt einer Koalitionsstruktur $\mathfrak{C}$ ist definiert als $v(\mathfrak{C}) = \sum_{C \in \mathfrak{C}} v(C)$. Hier gelten:

$$v(\mathfrak{C}_1) = 0+0+1 = 1, v(\mathfrak{C}_2) = 0+1 = 1, v(\mathfrak{C}_3) = 1+0 = 1, v(\mathfrak{C}_4) = 0+1 = 1, v(\mathfrak{C}_5) = 0.$$

Das Maximum ist also bei allen effizienten Ausgängen mit den Koalitionsstrukturen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ erreicht.

Dazu ist für jede der Koalitionsstrukturen nur ein Ausgang $(\mathfrak{C}_i, \vec{a})$ für $i \in \{1, \dots, 4\}$ mit ganzzahligen, effizienten und individuell rationalen Auszahlungsvektoren $\vec{a} \in \mathbb{N}$ möglich:

$$(\mathfrak{C}_i, (0, 0, 1)), i \in \{1, \dots, 4\}$$

Punktespiegel:

- Mögliche SWF-maximale Koalitionsstrukturen vollständig und korrekt (3)
- Auszahlungsvektoren vollständig und korrekt (2)

**(b)** **(3 Punkte)** Das Spiel ist nicht superadditiv, da etwa für die disjunkten Koalitionen $\{1\}$ und $\{2, 3\}$ die Ungleichung nicht erfüllt ist:

$$v(\{1\}) + v(\{2, 3\}) = 0 + 1 = 1 \not\leq 0 = v(\{1, 2, 3\}).$$

Punktespiegel:

- Formel richtig (1)
- geeignetes Gegenbeispiel (1)
- fehlerfrei (1)

**(c)** **(7 Punkte)** Die superadditive Überdeckung $(P, v^*)$ mit

$$v^*(C) = \max_{\mathfrak{C} \in \mathscr{C}\mathscr{S}_C} v(\mathfrak{C}) = \max_{\mathfrak{C} \in \mathscr{C}\mathscr{S}_C} \sum_{D \in \mathfrak{C}} v(D)$$

sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
v^*(\emptyset) &= 0, v^*(\{1\}) = 0, v^*(\{2\}) = 0, v^*(\{3\}) = 1, \\
v^*(\{1,2\}) &= \max\{v(\{1,2\}), v(\{1\}) + v(\{2\})\} = \max\{0, 0+0\} = 0, \\
v^*(\{1,3\}) &= \max\{v(\{1,3\}), v(\{1\}) + v(\{3\})\} = \max\{1, 0+1\} = 1 \\
v^*(\{2,3\}) &= \max\{v(\{2,3\}), v(\{2\}) + v(\{3\})\} = \max\{1, 0+1\} = 1 \\
v^*(\{1,2,3\}) &= \max\{v(\{1,2,3\}), v(\{1,2\}) + v(\{3\}), v(\{1,3\}) + v(\{2\}), \\
&\qquad v(\{1\}) + v(\{2,3\}), v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})\} \\
&= \max\{0, 1, 1, 1, 1\} = 1.
\end{aligned}$$

Punktespiegel:

- Korrekte Anwendung der Definition (Weg erkennbar) (2)
- Wert für leere Koalition angegeben (1)
- Wert für große Koalition angegeben (1)
- restliche Koalitionen (3)

**Aufgabe 5 (15 Punkte)** *Lösungskonzepte und Machtindizes in kooperativen Spielen*
Betrachten Sie das kooperative Spiel mit übertragbarem Nutzen $G = (P, v)$ mit $P = \{1, 2, 3\}$ und

$$v(C) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 3 \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $C \subseteq P$. Bekannte Aussagen aus der Vorlesung dürfen im Folgenden verwendet werden.

**(a)** Bestimmen Sie die Shapley-Werte der drei Spieler.

**(b)** Zeigen Sie, dass dieses Spiel konvex ist.

**(c)** Ist der Kern dieses Spiels leer? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn er nicht leer ist, geben Sie ein Element aus dem Kern an und begründen Sie, warum es im Kern enthalten ist. Wenn er leer ist, begründen Sie insbesondere, warum $(0, 0, 1)$ nicht im Kern liegt.

**(Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Argumentation vollständig und verständlich ist, und geben Sie alle Zwischenschritte an!)**

**(a)** **(5 Punkte)** • Erste Lösungsmöglichkeit per Beweis: Spieler 1 und 2 sind hier offenbar Dummy-Spieler, da für $i \in \{1, 2\}$ gilt, dass $v(C \cup \{i\}) = 1 = v(C)$ falls $3 \in C$, und $v(C \cup \{i\}) = 0 = v(C)$ falls $3 \notin C$. Es ist aus der VL bekannt, dass jeder Dummy-Spieler Shapley-Wert 0 hat, damit gilt also $\varphi_1(G) = \varphi_2(G) = 0$. Da die Summe der Shapley-Werte genau $v(P) = 1$ sein muss, folgt daraus $\varphi_3(G) = 1 - (0 + 0) = 1$.

• Zweite Lösungsmöglichkeit per Ausrechnen:

Koalitionen ohne Spieler 1: $C_1 = \{2\}, C_2 = \{3\}, C_3 = \{2, 3\}, C_4 = \emptyset$

$$\begin{aligned}
\mathrm{SSI}^*(G, 1) &= \|\{2\}\|!(3 - \|\{2\}\| - 1)!(v(\{2\} \cup \{1\}) - v(\{2\})) \\
&+ \|\{3\}\|!(3 - \|\{3\}\| - 1)!(v(\{3\} \cup \{1\}) - v(\{3\})) \\
&+ \|\{2,3\}\|!(3 - \|\{2,3\}\| - 1)!(v(\{2,3\} \cup \{1\}) - v(\{2,3\})) \\
&+ \|\emptyset\|!(3 - \|\emptyset\| - 1)!(v(\emptyset \cup \{1\}) - v(\emptyset)) \\
&= 1!1!(0 - 0) + 1!1!(1 - 1) + 2!0!(1 - 1) + 0!2!(0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_1(G) = \mathrm{SSI}(G, 1) = \frac{1}{3!}\mathrm{SSI}^*(G, 1) = 0$$

Koalitionen ohne Spieler 2: $C_1 = \{1\}, C_2 = \{3\}, C_3 = \{1, 3\}, C_4 = \emptyset$

$$\begin{aligned}
\mathrm{SSI}^*(G, 2) &= \|\{1\}\|!(3 - \|\{1\}\| - 1)!(v(\{1\} \cup \{2\}) - v(\{1\})) \\
&+ \|\{3\}\|!(3 - \|\{3\}\| - 1)!(v(\{3\} \cup \{2\}) - v(\{3\})) \\
&+ \|\{1,3\}\|!(3 - \|\{1,3\}\| - 1)!(v(\{1,3\} \cup \{2\}) - v(\{1,3\})) \\
&+ \|\emptyset\|!(3 - \|\emptyset\| - 1)!(v(\emptyset \cup \{2\}) - v(\emptyset)) \\
&= 1!1!(0 - 0) + 1!1!(1 - 1) + 2!0!(1 - 1) + 0!2!(0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_2(G) = \mathrm{SSI}(G, 2) = \frac{1}{3!}\mathrm{SSI}^*(G, 2) = 0$$

Koalitionen ohne Spieler 3: $C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{1,2\}, C_4 = \emptyset$

$$\begin{aligned}\mathrm{SSI}^*(G,3) &= \|\{1\}\|!(3 - \|\{1\}\| - 1)!(v(\{1\} \cup \{3\}) - v(\{1\}))\\ &+ \|\{2\}\|!(3 - \|\{2\}\| - 1)!(v(\{2\} \cup \{3\}) - v(\{2\}))\\ &+ \|\{1,2\}\|!(3 - \|\{1,2\}\| - 1)!(v(\{1,2\} \cup \{3\}) - v(\{1,2\}))\\ &+ \|\emptyset\|!(3 - \|\emptyset\| - 1)!(v(\emptyset \cup \{3\}) - v(\emptyset))\\ &= 1!1!(1-0) + 1!1!(1-0) + 2!0!(1-0) + 0!2!(1-0)\\ &= 6\\ \Rightarrow \varphi_3(G) = \mathrm{SSI}(G,3) &= \frac{1}{3!}\mathrm{SSI}^*(G,3) = 1\end{aligned}$$

Punktespiegel:

- Korrekte Ergebnisse (2)
- Korrekte und vollständige Rechnung/Begründung (3)

**(b)** **(6 Punkte)** Ein Spiel ist konvex, wenn für alle Koalitionspaare $C, D \subseteq P$ gilt:

$$v(C \cup D) + v(C \cap D) \geq v(C) + v(D)$$

Zeige, dass die Ungleichung für alle Koalitionspaare erfüllt ist:

- Für alle $C, D \subseteq P$ mit $3 \notin C$ und $3 \notin D$ gilt gilt
$$v(C \cup D) + v(C \cap D) = 0 + 0 = 0 + 0 = v(C) + v(D).$$
- Für alle $C, D \subseteq P$ mit $3 \in C$ und $3 \notin D$ gilt
$$v(C \cup D) + v(C \cap D) = 1 + 0 = 1 + 0 = v(C) + v(D).$$
- Für alle $C, D \subseteq P$ mit $3 \notin C$ und $3 \in D$ gilt
$$v(C \cup D) + v(C \cap D) = 1 + 0 = 0 + 1 = v(C) + v(D).$$
- Für alle $C, D \subseteq P$ mit $3 \in C$ und $3 \in D$ gilt
$$v(C \cup D) + v(C \cap D) = 1 + 1 = 1 + 1 = v(C) + v(D).$$

Punktespiegel:

- Definition Konvexität richtig angewandt (1)
- Korrekte und vollständige Ergebnisse mit Begründungen (5)

**(c)** **(4 Punkte)** Nach (b) ist das Spiel konvex, daraus folgt, dass der Kern des Spiels nicht leer ist. Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Kern eines konvexen einfachen Spiels immer den Auszahlungsvektor bestehend aus den Shapley-Werten der Spieler enthält. Also $(0,0,1) \in \mathrm{Core}(G)$.

Punktespiegel:

- Aussage Kern nicht leer (1)
- Begründung Kern nicht leer (1)
- Element angeben (1)
- Begründung, dass Element im Kern ist (1)

**Aufgabe 6 (10 Punkte + 10 Bonuspunkte)** *Eigenschaften einfacher kooperativer Spiele*

Für ein einfaches Spiel $G = (P, v)$ bezeichne $\mathscr{W} = \{C \subseteq P \mid v(C) = 1\}$ die Menge aller gewinnenden Koalitionen. $G$ heißt

- angemessen (*proper*), wenn $C \in \mathscr{W} \implies P \setminus C \notin \mathscr{W}$; und
- schwach (*weak*), wenn $\bigcap_{C \in \mathscr{W}} C \neq \emptyset$.

*Lösen Sie wahlweise eine der folgenden beiden Teilaufgaben. Wenn Sie beide Teilaufgaben bearbeiten, können Sie Bonuspunkte erhalten.*

**(a)** Geben Sie einen Wert für die Quote $q$ im allgemeinen gewichteten Wahlspiel $(w_1, \dots, w_n; q)$ mit $n \geq 2$ an, sodass das Spiel nicht angemessen ist. Begründen Sie dabei explizit, warum das entstehende Spiel nicht angemessen ist. Zeigen Sie, dass das so definierte gewichtete Wahlspiel nicht konvex ist.

**(b)** Zeigen Sie, dass für superadditive, einfache Spiele $G$ die folgende Aussage gilt:

$$G \text{ ist schwach} \Rightarrow \mathrm{CoS}(G) = 0.$$

**(Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Argumentation vollständig und verständlich ist! Punkte gibt es allerdings auch für unvollständige Argumentationen, sofern sie verständlich sind.)**

**(a)** **(10 Punkte)** Zum Beispiel $q = \min\limits_{i \in \{1,\dots,n\}} w_i$. Damit würde jeder Spieler alleine die Quote erreichen und jede Singleton-Koalition $\{i\}$ wäre in $\mathcal{W}$, aber auch jeweils $P \setminus \{i\}$ für alle $i \in P$. Damit kann das Spiel nicht angemessen sein.

Dieses Spiel ist nicht superadditiv, da für $n \geq 2$ gilt, dass $v(\{1, 2\}) = 1 \ngeq 2 = 1 + 1 = v(\{1\}) + v(\{2\})$. Damit kann das Spiel auch nicht konvex sein.

Alternativ direkt zeigen, dass Konvexität nicht erfüllt ist. Sei $n \geq 2$, dann ist
$v(\{1\} \cup \{2\}) + v(\{1\} \cap \{2\}) = 1 + 0 = 1 \ngeq 2 = 1 + 1 = v(\{1\}) + v(\{2\})$.

Punktespiegel:

- ein geeignetes $q$ angeben (1)
- korrekte und vollständige Begründung, dass das Spiel angemessen ist mit gegebenem $q$ (4)
- Gegenbeispiel oder Argumentation, dass Spiel nicht konvex ist (5)

**(b)** **(10 Punkte)** Sei $G$ ein einfaches, superadditives, schwaches Spiel. Von Blatt 8 wissen wir, dass einfache schwache Spiele mindestens einen Veto-Spieler enthalten. Da $G$ superadditiv ist, folgt daraus (laut Vorlesung, Folie 15 in Foliensatz 2.2), dass der Kern des Spiels nicht leer ist. Daraus folgt wiederum (nach Definition von $\mathrm{CoS}(G)$), dass $\mathrm{CoS}(G) = 0$.

Punktespiegel:

- vollständige Beweisstruktur, alle Schritte belegt (7)
- fehlerfrei (3)

**Die Aufgabenblätter bitte mit ausgefüllten Kopfzeilen abgeben.**
**VIEL SPASS – VIEL GLÜCK – VIEL ERFOLG**