Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: 02, Raum: 26
Tel.: +49 211 8112188
E-Mail: rothe@hhu.de

23. Dezember 2022

Vorlesung im Wintersemester 2022/2023

Probeklausur Algorithmische Spieltheorie

17. Januar 2023

Die Klausuraufgaben selbst können zwar den Aufgaben in der Probeklausur ähnlich sein, müssen aber nicht! Der Umfang der Probeklausur entspricht nicht notwendigerweise dem Umfang der Klausur! Die Probeklausur ist angelehnt an die Nachklausur zur Algorithmischen Spieltheorie vom Wintersemester 2015/2016.

Name, Vorname:

Studienfach, Semester:

Matrikelnummer:

Anzahl der abgegebenen Blätter, inklusive Aufgabenblätter:

Erlaubte Hilfsmittel:

- Vorlesungsmitschriften, Bücher, Übungsblätter,
- Gedächtnis.

Nicht erlaubte Hilfsmittel:

- Mobiltelefone und ähnliche Kommunikationsgeräte,
- Kommiliton/inn/en,
- Taschenrechner.

Achten Sie darauf, dass Ihre Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und eindeutig sind!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
erreichbare Punktzahl	20	25	15	15	15	10 + 10 (Bonus)	100 + 10
erreichte Punktzahl							

Aufgabe 1 (20 Punkte) *Multiple Choice*

Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile either „Yes“ or „No“ an.

Bewertung: Bezeichnet $\#R$ die Anzahl der von Ihnen richtig angekreuzten Antworten und $\#K$ die Anzahl der von Ihnen insgesamt angekreuzten Antworten (d. h. nur solche, bei denen *either „Yes“ or „No“* angekreuzt wurde – Antworten, bei denen neither „Yes“ nor „No“ or both „Yes“ and „No“ angekreuzt wurde, zählen nicht zu $\#K$), so ergibt sich die folgende Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe:

$$\#R + \left\lfloor \frac{5 \cdot \#R}{\#K} \right\rfloor \text{ Punkte, falls } \#K > 0, \text{ und } 0 \text{ Punkte, falls } \#K = 0.$$

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein In einem nichtkooperativen Spiel in Normalform ist ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien stets ein Pareto-optimales Strategieprofil.

☐ Ja ☐ Nein In der „Schlacht der Geschlechter“ gibt es ein striktes (also eindeutiges) Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

☐ Ja ☐ Nein In der „Schlacht der Geschlechter“ sind alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien Pareto-Optima und umgekehrt.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein In einem nichtkooperativen Spiel in Normalform gibt es stets mindestens ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

☐ Ja ☐ Nein Im Gefangenendilemma gibt es mehr Nash-Gleichgewichte in gemischten als in reinen Strategien.

☐ Ja ☐ Nein Jeder 3-Simplex hat sechs 1-Flächen und vier 2-Flächen.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

☐ Ja ☐ Nein Es kann in deterministischer Polynomialzeit entschieden werden, ob Spieler 1 im Spiel GEOGRAPHY keine Gewinnstrategie hat.

☐ Ja ☐ Nein Bei Tic-Tac-Toe kann man ein Unentschieden stets erzwingen.

☐ Ja ☐ Nein Das 3-*player majority game* $G = (P, v)$ (definiert durch $P = \{1, 2, 3\}$ und $v(C) = 1$, falls $\|C\| \geq 2$, und $v(C) = 0$ sonst) ist superadditiv.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Konvexe kooperative Spiele haben stets einen nicht leeren Kern.

☐ Ja ☐ Nein Jedes Teilspiel eines konvexen kooperativen Spiels hat einen nicht leeren Kern.

☐ Ja ☐ Nein Nicht konvexe kooperative Spiele haben stets einen leeren Kern.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Ein einfaches superadditives Spiel hat genau dann einen nicht leeren Kern, wenn es keinen Veto-Spieler hat.

☐ Ja ☐ Nein Man kann in deterministischer Polynomialzeit entscheiden, ob ein gegebener Spieler in einem gegebenen gewichteten Wahlspiel (in dem die große Koalition gewinnt) ein Veto-Spieler ist.

☐ Ja ☐ Nein Hat ein Spieler in einem monotonen kooperativen Spiel den Shapley-Wert 0, so muss er ein Dummy-Spieler sein.

Aufgabe 2 (25 Punkte) *Lösungskonzepte in nichtkooperativen Spielen*

Betrachten Sie das nichtkooperative Spiel in Normalform mit der Spielermenge $P = \{1, 2\}$, der Menge der Strategieprofile $\mathscr{S} = S_1 \times S_2$, wobei $S_i = \{a, b, c, d, e, f\}$ für $i \in \{1, 2\}$, und den folgenden Gewinnfunktionen:

		Spieler 2					
		a	b	c	d	e	f
Spieler 1	a	$(1, 4)$	$(2, 3)$	$(2, 4)$	$(3, -1)$	$(2, -1)$	$(-2, 4)$
	b	$(1, 4)$	$(3, 2)$	$(-1, 3)$	$(1, -3)$	$(2, 4)$	$(4, 3)$
	c	$(-4, 1)$	$(3, 2)$	$(1, 2)$	$(-1, 4)$	$(-3, 2)$	$(-2, 1)$
	d	$(3, 4)$	$(-3, 2)$	$(-2, 1)$	$(1, -3)$	$(1, 1)$	$(3, 4)$
	e	$(4, 4)$	$(1, 3)$	$(1, 3)$	$(3, 3)$	$(2, -2)$	$(-1, 1)$
	f	$(1, 3)$	$(2, 2)$	$(2, 3)$	$(1, -3)$	$(1, -1)$	$(3, -3)$

(a) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien und alle besten Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien. Begründen Sie jeweils, warum es sich um ein Nash-Gleichgewicht bzw. ein bestes Nash-Gleichgewicht handelt.

(b) Betrachten Sie die Einschränkung dieses Spiels auf die Strategiemengen $S_1' = \{a, b\}$ und $S_2' = \{a, b\}$ und bestimmen Sie alle Pareto-optimalen Strategieprofile und alle dominanten Strategien in dem eingeschränkten Spiel. (Zur Begründung der Pareto-Optimalität eines Strategieprofils kann eine grafische Veranschaulichung verwendet werden, wenn diese ausführlich erläutert wird.)

(c) Betrachten Sie die Einschränkung dieses Spiels auf die Strategiemengen $S_1'' = \{e, f\}$ und $S_2'' = \{e, f\}$ und bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien. Argumentieren Sie kurz, warum es keine weiteren als die angegebenen Nash-Gleichgewichte gibt.

(d) Betrachten Sie die Einschränkung dieses Spiels auf die Strategiemengen $S_1'' = \{e, f\}$ und $S_2'' = \{e, f\}$ und bestimmen Sie die Minmax-Strategie von Spieler 2 gegen Spieler 1 und den Minmax-Wert für Spieler 1.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an und begründen Sie Ihre Antworten!)

Aufgabe 3 (15 Punkte) *Eigenschaften in nichtkooperativen Spielen*

Gegeben sei ein nichtkooperatives Spiel in Normalform mit zwei Spielern und je zwei Strategien pro Spieler, in dem alle Strategieprofile Pareto-optimal sind. Zeigen Sie, dass, wenn es in solch einem Spiel zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien gibt, beide Spieler mindestens eine dominante Strategie haben.

(Bitte argumentieren Sie formal über die Gewinnfunktion und achten Sie darauf, dass Ihre Argumentation vollständig und verständlich ist!)

Aufgabe 4 (15 Punkte) *Koalitionsstrukturen und Superadditivität*

Betrachten Sie das kooperative Spiel mit übertragbarem Nutzen $G = (P, v)$ mit $P = \{1, 2, 3\}$ und v wie in der folgenden Tabelle angegeben:

C	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(C)$	0	0	0	1	0	1	1	0

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Ausgänge (d. h. Ergebnisse der Form (Koalitionsstruktur, Auszahlungsvektor)) dieses Spiels, die die soziale Wohlfahrt maximieren. Beschränken Sie sich dabei auf Auszahlungsvektoren, die ganzzahlig, effizient und individuell rational sind.

(b) Zeigen Sie, dass das Spiel nicht superadditiv ist.

(c) Bestimmen Sie die superadditive Überdeckung des Spiels.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an und begründen Sie Ihre Antworten!)

Aufgabe 5 (15 Punkte) *Lösungskonzepte und Machtindizes in kooperativen Spielen*
Betrachten Sie das kooperative Spiel mit übertragbarem Nutzen $G = (P, v)$ mit $P = \{1, 2, 3\}$ und

$$v(C) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 3 \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $C \subseteq P$. Bekannte Aussagen aus der Vorlesung dürfen im Folgenden verwendet werden.

(a) Bestimmen Sie die Shapley-Werte der drei Spieler.

(b) Zeigen Sie, dass dieses Spiel konvex ist.

(c) Ist der Kern dieses Spiels leer? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn er nicht leer ist, geben Sie ein Element aus dem Kern an und begründen Sie, warum es im Kern enthalten ist. Wenn er leer ist, begründen Sie insbesondere, warum $(0, 0, 1)$ nicht im Kern liegt.

(Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Argumentation vollständig und verständlich ist, und geben Sie alle Zwischenschritte an!)

Aufgabe 6 (10 Punkte + 10 Bonuspunkte) *Eigenschaften einfacher kooperativer Spiele*

Für ein einfaches Spiel $G = (P, v)$ bezeichne $\mathscr{W} = \{C \subseteq P \mid v(C) = 1\}$ die Menge aller gewinnenden Koalitionen. G heißt

- angemessen (*proper*), wenn $C \in \mathscr{W} \implies P \setminus C \notin \mathscr{W}$; und
- schwach (*weak*), wenn $\bigcap_{C \in \mathscr{W}} C \neq \emptyset$.

Lösen Sie wahlweise eine der folgenden beiden Teilaufgaben. Wenn Sie beide Teilaufgaben bearbeiten, können Sie Bonuspunkte erhalten.

(a) Geben Sie einen Wert für die Quote q im allgemeinen gewichteten Wahlspiel $(w_1, \dots, w_n; q)$ mit $n \geq 2$ an, sodass das Spiel nicht angemessen ist. Begründen Sie dabei explizit, warum das entstehende Spiel nicht angemessen ist. Zeigen Sie, dass das so definierte gewichtete Wahlspiel nicht konvex ist.

(b) Zeigen Sie, dass für superadditive, einfache Spiele G die folgende Aussage gilt:

$$G \text{ ist schwach} \Rightarrow \mathrm{CoS}(G) = 0.$$

(Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Argumentation vollständig und verständlich ist! Punkte gibt es allerdings auch für unvollständige Argumentationen, sofern sie verständlich sind.)

Die Aufgabenblätter bitte mit ausgefüllten Kopfzeilen abgeben.
VIEL SPASS – VIEL GLÜCK – VIEL ERFOLG