Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

(Lösungsvorschläge)

Blatt 12

Besprechung: 25. bis 27.01.2023

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Beneficial Merging

Betrachten Sie das gewichtete Wahlspiel $G = (10, 6, 3, 5, 9; 15)$ mit Spielermenge $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Ist es in Bezug auf den Shapley-Shubik-Index für Spieler 3 und 4 vorteilhaft sich zu vereinigen? (Anders formuliert: Ist $(G, \{3, 4\})$ eine Ja-Instanz von SHAPLEY-SHUBIK-BENEFICIAL-MERGE?)

Lösungsvorschlag: Wir müssen prüfen, ob $SSI(G_{\&\{3,4\}}, 1) > SSI(G, 3) + SSI(G, 4)$ gilt. Dabei ist $G_{\&\{3,4\}} = (8, 10, 6, 9; 15)$.

Zunächst bestimmen wir $SSI(G, 3)$:
Spieler 3 ist pivotal für alle Koalitionen $C \subseteq P \setminus \{3\}$ mit $12 \leq w(C) \leq 14$. Das wird nur erfüllt von der Koalition $\{4, 5\}$ mit Gewicht $w(\{4, 5\}) = 14$. Daher gilt

$$SSI(G, 3) = \frac{1}{5!} \cdot 2! \cdot (5 - 2 - 1)! = \frac{4}{5!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{30}.$$

Als nächstes bestimmen wir $SSI(G, 4)$:
Spieler 4 ist pivotal für alle Koalitionen $C \subseteq P \setminus \{4\}$ mit $10 \leq w(C) \leq 14$. Das wird erfüllt von den Koalitionen $\{1\}$, $\{1, 3\}$ und $\{3, 5\}$. Somit gilt

$$SSI(G, 4) = \frac{1}{5!} \cdot (1! \cdot (5-1-1)! + 2 \cdot 2! \cdot (5-2-1)!) = \frac{6+8}{5!} = \frac{14}{5!} = \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{7}{60}.$$

Nun bestimmen wir $SSI(G_{\&\{3,4\}}, 1)$:
Spieler 1 in $G_{\&\{3,4\}} = (8, 10, 6, 9; 15)$ ist pivotal für Koalitionen mit $C \subseteq \{2, 3, 4\}$ mit $7 \leq w(C) \leq 14$. Das wird erfüllt von den Koalitionen $\{2\}$ und $\{4\}$. Es gilt also

$$SSI(G_{\&\{3,4\}}, 1) = \frac{1}{4!} \cdot 2 \cdot 1! \cdot (4 - 1 - 1)! = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Da $SSI(G_{\&\{3,4\}}, 1) = \frac{1}{6} > \frac{3}{20} = \frac{1}{30} + \frac{7}{60} = SSI(G, 3) + SSI(G, 4)$ gilt, ist es für Spieler 3 und 4 in Bezug auf den Shapley-Shubik-Index vorteilhaft sich zu vereinigen und $(G, \{3, 4\})$ eine Ja-Instanz von SHAPLEY-SHUBIK-BENEFICIAL-MERGE.

(b) Ist es in Bezug auf den (probabilistischen) Banzhaf-Index für Spieler 1 und 3 vorteilhaft sich zu vereinigen? (Anders formuliert: Ist $(G, \{1,3\})$ eine Ja-Instanz von Banzhaf-Beneficial-Merge?)

Lösungsvorschlag: Wir müssen prüfen, ob $BI(G_{\&\{1,3\}}, 1) > BI(G, 1) + BI(G, 3)$ gilt. Dabei ist $G_{\&\{1,3\}} = (13, 6, 5, 9; 15)$.

Zunächst bestimmen wir $BI(G, 1)$:
Spieler 1 ist pivotal für alle Koalitionen $C \subseteq P \setminus \{1\}$ mit $5 \leq w(C) \leq 14$. Das trifft auf die folgenden 9 Koalitionen zu: $\{2\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, und $\{2,3,4\}$. Daher gilt

$$BI(G, 1) = \frac{9}{2^4} = \frac{9}{16}.$$

Als nächstes bestimmen wir $BI(G, 3)$:
Aus Teil (a) wissen wir bereits, dass Spieler 3 nur pivotal für Koalition $\{4,5\}$ ist. Also ist

$$BI(G, 3) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

Nun bestimmen wir $BI(G_{\&\{1,3\}}, 1)$:
Spieler 1 in $G_{\&\{1,3\}} = (13, 6, 5, 9; 15)$ ist pivotal für Koalitionen mit $C \subseteq \{2,3,4\}$ mit $2 \leq w(C) \leq 14$. Das wird erfüllt von den Koalitionen $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2,3\}$ und $\{3,4\}$. Es gilt also

$$BI(G_{\&\{1,3\}}, 1) = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}.$$

Da $BI(G_{\&\{1,3\}}, 1) = \frac{5}{8} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = BI(G, 1) + BI(G, 3)$ gilt, ist es für Spieler 3 und 4 in Bezug auf den probabilistischen Banzhaf-Index **nicht** vorteilhaft sich zu vereinigen und $(G, \{1,3\})$ eine Nein-Instanz von Banzhaf-Beneficial-Merge.

Aufgabe 2: Beneficial Splitting

Betrachten Sie das gewichtete Wahlspiel $G = (4, 3, 12, 2; 15)$ mit Spielermenge $P = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Ist es in Bezug auf den Shapley-Shubik-Index für Spieler 1 vorteilhaft sich in drei neue Spieler aufzuteilen? (Anders formuliert: Ist $(G, 1, 3)$ eine Ja-Instanz von Shapley-Shubik-Beneficial-Split?)

Lösungsvorschlag: Wenn Spieler 1 sich in drei Spieler aufteilt, dann haben diese drei Spieler die Gewichte 1, 1 und 2. (Das ist die einzige Möglichkeit das Gewicht 4 in drei positive ganzzahlige Gewichte zu teilen. Die Ordnung der drei Spieler ist dabei irrelevant.) Es gilt also $G_{1\div 3} = (1, 1, 2, 3, 12, 2; 15)$.

Wir wollen nun wissen, ob folgendes gilt:

$$SSI(G_{1\div 3}, 1) + SSI(G_{1\div 3}, 2) + SSI(G_{1\div 3}, 3) > SSI(G, 1).$$

Zunächst bestimmen wir $SSI(G, 1)$:
Spieler 1 ist in G pivotal für alle Koalitionen (ohne 1) mit einem Gewicht zwischen 11 und 14. Das trifft zu für Koalitionen $\{3\}$ und $\{3, 4\}$. Also ist

$$SSI(G, 1) = \frac{1}{4!} \cdot (1! \cdot (4 - 1 - 1)! + 2! \cdot (4 - 2 - 1)!) = \frac{2 + 2}{4!} = \frac{1}{6}.$$

Nun bestimmen wir $SSI(G_{1\div 3}, 1)$:
Spieler 1 ist in $G_{1\div 3}$ pivotal für alle Koalitionen $C \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6\}$ mit einem Gewicht von 14. Das trifft zu auf Koalitionen $\{3, 5\}$ und $\{5, 6\}$. Also ist

$$SSI(G_{1\div 3}, 1) = \frac{1}{6!} \cdot (2 \cdot 2! \cdot (6 - 2 - 1)!) = \frac{24}{6!} = \frac{4}{5!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{30}.$$

Da Spieler 2 das gleiche Gewicht wie Spieler 1 hat, gilt außerdem

$$SSI(G_{1\div 3}, 2) = SSI(G_{1\div 3}, 1) = \frac{1}{30}.$$

Nun bestimmen wir $SSI(G_{1\div 3}, 3)$:
Spieler 3 ist in $G_{1\div 3}$ pivotal für alle Koalitionen $C \subseteq \{1, 2, 4, 5, 6\}$ mit einem Gewicht von 13 oder 14. Das trifft zu auf Koalitionen $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, $\{1, 2, 5\}$ und $\{5, 6\}$. Also ist

$$\begin{aligned} SSI(G_{1\div 3}, 3) &= \frac{1}{6!} \cdot (3 \cdot 2! \cdot (6 - 2 - 1)! + 3! \cdot (6 - 3 - 1)!) \\ &= \frac{36 + 12}{6!} = \frac{48}{6!} = \frac{8}{5!} = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Somit gilt $SSI(G_{1\div 3}, 1) + SSI(G_{1\div 3}, 2) + SSI(G_{1\div 3}, 3) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{15} < \frac{1}{6} = SSI(G, 1)$ und es ist für Spieler 1 **nicht** vorteilhaft sich in drei Spieler aufzuteilen. Es ist hier sogar nachteilig. $(G, 1, 3)$ ist also eine Nein-Instanz von Shapley-Shubik-Beneficial-Split.

(b) Ist es in Bezug auf den (probabilistischen) Banzhaf-Index für Spieler 2 vorteilhaft sich in zwei neue Spieler aufzuteilen? (Anders formuliert: Ist $(G, 2, 2)$ eine Ja-Instanz von Banzhaf-Beneficial-Split?)

Lösungsvorschlag: Wenn Spieler 2 sich in zwei Spieler aufteilt, dann haben diese zwei Spieler die Gewichte 1 und 2. (Die Ordnung der Spieler ist wieder irrelevant.) Es gilt also $G_{2\div 2} = (4, 1, 2, 12, 2; 15)$.

Wir wollen nun wissen, ob folgendes gilt:

$$BI(G_{2\div 2}, 2) + BI(G_{2\div 2}, 3) > BI(G, 2).$$

Zunächst bestimmen wir $BI(G, 2)$:
Spieler 2 ist in G pivotal für alle Koalitionen $C \subseteq \{1, 3, 4\}$ mit einem Gewicht zwischen 12 und 14. Das trifft zu für Koalitionen $\{3\}$ und $\{3, 4\}$. Also ist

$$BI(G, 2) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}.$$

Nun bestimmen wir $BI(G_{2\div 2}, 2)$:
Spieler 2 ist in $G_{2\div 2}$ pivotal für alle Koalitionen $C \subseteq \{1, 3, 4, 5\}$ mit einem Gewicht von 14. Das trifft zu auf Koalitionen $\{3, 4\}$ und $\{4, 5\}$. Also ist

$$BI(G_{2\div 2}, 2) = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{8}.$$

Zuletzt bestimmen wir $BI(G_{2\div 2}, 3)$:
Spieler 3 ist in $G_{2\div 2}$ pivotal für alle Koalitionen $C \subseteq \{1, 2, 4, 5\}$ mit einem Gewicht von 13 oder 14. Das trifft zu auf Koalitionen $\{2, 4\}$ und $\{4, 5\}$. Also ist

$$BI(G_{2\div 2}, 3) = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{8}.$$

Da $BI(G_{2\div 2}, 2) + BI(G_{2\div 2}, 3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = BI(G, 2)$ gilt, ist es für Spieler 2 in Bezug auf den (probabilistischen) Banzhaf-Index **nicht** vorteilhaft sich in zwei neue Spieler aufzuteilen. $(G, 2, 2)$ ist also eine Nein-Instanz von Banzhaf-Beneficial-Split.

Aufgabe 3: Compare-#SubsetSum-R

(a) Ist die folgende Instanz eine Ja-Instanzen von Compare-#SubsetSum-R?
$A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 4, 6, 2)$, $q_1 = 6$, $q_2 = 8$

Lösungsvorschlag: Die Summe $q_1 = 6$ ergibt sich durch die folgenden drei Kombinationen:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 6 \\ a_2 + a_4 &= 6 \\ a_3 &= 6 \end{aligned}$$

Es gilt also $\#\textsc{SubsetSum}((2, 4, 6, 2), q1) = 3$.

Die Summe $q_2 = 8$ ergibt sich auch durch drei Kombinationen:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_4 &= 8 \\ a_1 + a_3 &= 8 \\ a_3 + a_4 &= 8 \end{aligned}$$

Es gilt also $\#\textsc{SubsetSum}((2, 4, 6, 2), q2) = 3$.

Da somit nicht $\#\textsc{SubsetSum}((2, 4, 6, 2), q1) > \#\textsc{SubsetSum}((2, 4, 6, 2), q2)$ gilt, ist dies eine Nein-Instanz von Compare-#SubsetSum-R.

(b) Betrachten Sie die polynomialzeit many-one Reduktion von Compare-#SubsetSum auf Compare-#SubsetSum-R (Kapitel 2.4, Folie 57). Konstruieren Sie wie dort angegeben aus der Compare-#SubsetSum-Instanz (X, Y) mit $X = ((1, 4, 7, 2, 4), 10)$ und $Y = ((5, 3, 2, 1, 1, 1), 8)$ eine Instanz von Compare-#SubsetSum-R.

Lösungsvorschlag: Es gilt $\alpha = 1 + 4 + 7 + 2 + 4 = 18$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} A =& (1, 4, 7, 2, 4, 2 \cdot 18 \cdot 5, 2 \cdot 18 \cdot 3, 2 \cdot 18 \cdot 2, 2 \cdot 18 \cdot 1, 2 \cdot 18 \cdot 1, 2 \cdot 18 \cdot 1) \\ =& (1, 4, 7, 2, 4, 180, 108, 72, 36, 36, 36), \end{aligned}$$

$q_1 = 10$ und $q_2 = 2 \cdot 18 \cdot 8 = 288$.

(c) Ist die in (b) entstandene Compare-#SubsetSum-R-Instanz eine Ja-Instanz?

Lösungsvorschlag: Um dies zu beantworten prüfe ich, ob (X, Y) eine Ja-Instanz von Compare-#SubsetSum ist, denn dies gilt genau dann wenn die in (b) entstandene Compare-#SubsetSum-R-Instanz eine Ja-Instanz ist.

Zunächst bestimme ich $\#\textsc{SubsetSum}(X)$: Die Summe 10 lässt sich nur aus zwei Zahlenkombinationen bilden: 1+7+2 und 4+2+4. Also $\#\textsc{SubsetSum}(X) = 2$.

Bestimme nun #SubsetSum(Y): Die Summe 8 lässt sich bilden aus folgenden Zahlenkombinationen: 5+3, 5+2+1 (dreimal mit verschiedenen 1en), 5+1+1+1, und $3+2+1+1+1$. Somit gilt #SubsetSum$(Y) = 6$.

Da #SubsetSum(X) $<$ #SubsetSum(Y) gilt, ist (X, Y) eine Nein-Instanz von Compare-#SubsetSum. Somit ist auch die Compare-#SubsetSum-R-Instanz eine Nein-Instanz.