Übung zur Vorlesung
Algorithmische Spieltheorie
(Lösungsvorschläge)

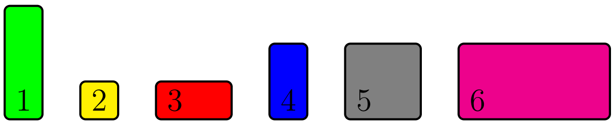
Blatt 11

Besprechung: 11. bis 13.01.2023

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Shapley-Index im 2-gewichteten Wahlspiel

Betrachten Sie die folgenden grafisch dargestellten Spieler eines 2-gewichteten Wahlspiels:



(a) Die Gewichte des ersten Spielers sind $\vec{w}_1 = (1, 3)$. Geben Sie analog $\vec{w}_2$ bis $\vec{w}_6$ an.

Lösungsvorschlag:

$$\vec{w}_1 = (1, 3)$$
$$\vec{w}_2 = (1, 1)$$
$$\vec{w}_3 = (2, 1)$$
$$\vec{w}_4 = (1, 2)$$
$$\vec{w}_5 = (2, 2)$$
$$\vec{w}_6 = (4, 2)$$

(b) Die Quoten des Spiels sind $\vec{q} = (7, 6)$. Bestimmen Sie den Shapley-Index von Spieler 2.

Lösungsvorschlag: Da das Spiel einfach ist, bestimme ich den Shapley-Shubik Index, welcher dem Shapley-Index entspricht.

Spieler 2 ist pivotal für alle Koalitionen $C \subseteq P \setminus \{2\}$ mit

$$\left(w^1(C) < 7 \;\text{ ODER }\; w^2(C) < 6\right) \;\text{ UND }\; w^1(C) + 1 \geq 7 \;\text{ UND }\; w^2(C) + 1 \geq 6.$$

Das bedeutet $w^1(C) \geq 6$ und $w^2(C) \geq 5$, wobei in mindestens einer der zwei Gleichungen Gleichheit gelten muss.

Koalitionen $C \subseteq P \setminus \{2\}$ mit Breite $w^1(C) = 6$ und Höhe $w^2(C) \geq 5$ sind: $\{1, 4, 6\}$ und $\{1, 3, 4, 5\}$.

Koalitionen $C \subseteq P \setminus \{2\}$ mit Breite $w^1(C) \geq 6$ und Höhe $w^2(C) = 5$ sind: $\{3, 4, 6\}$ und $\{3, 5, 6\}$.

Somit ist der Shapley-Shubik Index von Spieler 2:

$$\begin{aligned} SSI(G,2) &= \frac{1}{6!}\Big(3 \cdot 3! \cdot (6-3-1)! + 4! \cdot (6-4-1)!\Big) \\ &= \frac{1}{6!}\Big(3 \cdot 6 \cdot 2 + 24 \cdot 1\Big) = \frac{1}{5!}\Big(6+4\Big) = \frac{1}{4!}\Big(2\Big) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

(c) Was ist die Dimension dieses Spiels? Begründen Sie.

Lösungsvorschlag: Da das Spiel oben als 2-gewichtetes Wahlspiel dargestellt ist, ist die Dimension höchstens zwei.

Zeige nun, dass die Dimension genau 2 ist: Angenommen, die Dimension wäre 1. Dann gäbe es ein gewichtetes Wahlspiel $G = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6; q)$, das die gleichen gewinnenden Koalitionen hat, wie das obige Spiel. Unterer anderem muss also gelten:

$$\begin{aligned} w_1 + w_6 + w_3 &\geq q, && (1) \\ w_1 + w_6 + w_4 &< q, && (2) \\ w_5 + w_6 + w_4 &\geq q, && (3) \\ w_5 + w_6 + w_3 &< q. && (4) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt $w_4 < w_3$. Aus (3) und (4) folgt $w_3 < w_4$. Das ist ein Widerspruch.

Die Dimension des Spiels ist also 2.

Aufgabe 2: Dummy ist coNP-vollständig

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass das Problem Dummy coNP-vollständig ist (siehe Kapitel 2.4, Folien 8 und 9). Zum Beweis der coNP-Härte wurde dabei eine many-one Reduktion von Partition auf das Komplement von Dummy angegeben. Eine beliebige Partition-Instanz

$$I = (k_1, ..., k_n) \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} k_i = 2K$$

wird dabei abgebildet auf eine Dummy-Instanz bestehend aus dem gewichtete Wahlspiel

$$G = (2k_1, ..., 2k_n, 1; 2K + 1)$$

und dem ausgezeichneten Spieler $n + 1$.

(a) Betrachten Sie die Partition-Instanz $I = (2, 3, 7, 1, 4, 5)$. Geben Sie die Dummy-Instanz an, welche aus I konstruiert wird. Ist I eine Ja-Instanz von Partition? Ist die konstruierte Dummy-Instanz eine Ja-Instanz von Dummy?

Lösungsvorschlag: Die konstruierte DUMMY-Instanz besteht aus dem gewichtete Wahlspiel $G = (4, 6, 14, 2, 8, 10, 1; 23)$ und dem ausgezeichneten Spieler 7.

I ist eine Ja-Instanz von PARTITION, denn für die Menge $A = \{2, 3, 4\}$ gilt, dass $\sum_{i \in A} k_i = k_2 + k_3 + k_4 = 3+7+1 = 11 = 2+4+5 = k_1 + k_5 + k_6 = \sum_{i \in \{1,\ldots,6\} \setminus A} k_i$.

Somit ist nach Konstruktion klar, dass $(G, 7)$ eine Nein-Instanz von DUMMY sein muss (denn I ist eine Ja-Instanz von PARTITION genau dann, wenn $(G, 7)$ eine Nein-Instanz von DUMMY ist).

Dass Spieler 7 kein Dummy-Spieler in G ist, lässt sich auch dadurch erkennen, dass 7 nicht für alle Koalitionen nutzlos ist. Für Koalition $C = \{2, 3, 4\}$ gilt wegen $w_2 + w_3 + w_4 = 22 < 23 = q$ und $w_2 + w_3 + w_4 + w_7 = 23 = q$, dass $v(C \cup \{7\}) = 1 \neq 0 = v(C)$.

(b) Betrachten Sie die DUMMY-Instanz bestehend aus $G = (24, 2, 12, 8, 10, 1; 29)$ und Spieler 6. Geben Sie die zugehörige PARTITION-Instanz I an. Handelt es sich bei den zwei Instanzen jeweils um Ja-Instanzen?

Lösungsvorschlag: Die dazugehörige PARTITION-Instanz ist $I = (12, 1, 6, 4, 5)$. Die Summe der Werte ist dabei 28. Wäre I eine Ja-Instanz, dann müssten sich die Werte in zwei Teilmengen partitionieren lassen, die jeweils eine Summe von 14 haben. Es ist jedoch nicht möglich die 12 mit den anderen Werten zu kombinieren, sodass die Summe 14 entsteht. Daher ist I eine Nein-Instanz.

Dementsprechend ist Spieler 6 in G ein Dummy-Spieler und $(G, 6)$ eine Ja-Instanz.

Aufgabe 3: Schimmlige Schokolade zu Weihnachten

Anna und Belle haben zu Weihnachten eine Tafel Schokolade geschenkt bekommen. Aber leider ist das unterste linke Stück der Tafel verschimmelt. Sie brechen die Tafel abwechselnd entlang einer Bruchkante entzwei und essen eine der beiden Hälften auf. Bleibt nur noch ein Stück übrig, so wird dieses direkt gegessen. Wer das verschimmelte Stück isst, hat verloren. Anna macht den ersten Zug. Wer hat eine Gewinnstrategie, ...

(a) ... wenn sie mit einer Tafel Ritter-Sport-Schokolade (4×4) beginnen?

Lösungsvorschlag:

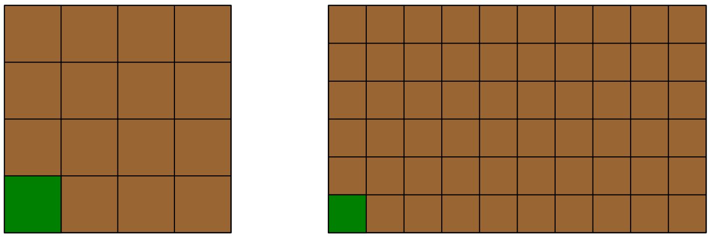
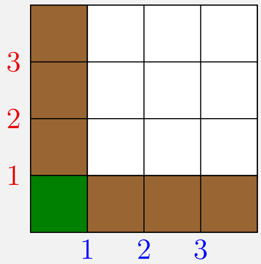


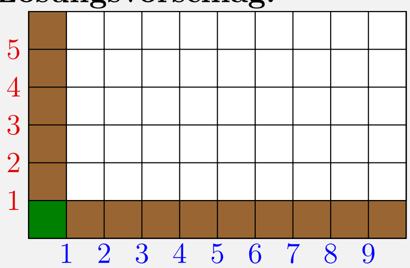
Abbildung 1: Abbildung der zwei Schokoladentafeln



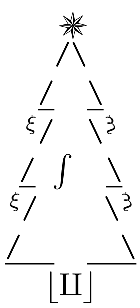
Hier gibt es zu Beginn nur sechs Kanten, an denen gebrochen werden kann. Man kann nämlich entweder von rechts oder oben eins, zwei oder drei Reihen abbrechen. Im Prinzip verhält es sich hier ähnlich wie beim Spiel Nim mit zwei Stapeln. (Man möchte hier selbst das letzte braune Stück nehmen.)
In diesem Fall hat Belle eine Gewinnstrategie: Bricht Anna von einer Seite x Reihen ab, so bricht Belle von der anderen Seite x Reihen ab. Das macht sie bei jedem Zug. Diese Strategie garantiert ihr, dass Belle auf jeden Fall die letzte Reihe von einer Seite nimmt, nachdem Anna die letzte Reihe von der anderen Seite genommen hat. So bleibt zum Schluss immer noch das schimmlige Stück für Anna übrig.

(b) ... wenn sie mit einer Tafel Milka-Schokolade (6×10) beginnen?

Lösungsvorschlag:



Hier hat Anna eine Gewinnstrategie: Sie bricht in ihrem ersten Zug vier Reihen von rechts ab. So bleibt noch eine (6×6)-Tafel übrig. Dann kann Anna danach die gleiche Strategie anwenden, wie Belle zuvor bei der (4×4)-Tafel. So bleibt diesmal das schimmlige Stück für Belle übrig.



❄❄❄ Wir wünschen Ihnen schöne Ferien,
fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch!!! ❄❄❄