Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

(Lösungsvorschläge)

Blatt 10

Besprechung: 21. bis 23.12.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Konvexe Spiele

Zeigen Sie, dass in einfachen, konvexen Spielen jeder Spieler entweder ein Veto-Spieler oder ein Dummy-Spieler ist.

Lösungsvorschlag: Sei $G = (P, v)$ ein einfaches, konvexes Spiel.
Betrachte nun einen Spieler j, der kein Veto-Spieler in G ist. Das heißt nach Definition, dass $v(P \smallsetminus \{j\}) = 1$. Da G konvex ist, folgt nach der Charakterisierung konvexer Spiele (siehe Kapitel 2.2, Folie 3) für alle $C \subseteq D \subseteq P \smallsetminus \{j\}$, dass $v(C \cup \{j\}) - v(C) \leq v(D \cup \{j\}) - v(D)$, insbesondere also für $D = P \smallsetminus \{j\}$:

$$v(C \cup \{j\}) - v(C) \leq v(P) - v(P \smallsetminus \{j\}) = 1 - 1 = 0.$$

Das heißt, jeder Summand im Shapley-Wert von j ist 0, also $\varphi_j(G) = 0$. Da G einfach und damit monoton ist, wissen wir aus der Vorlesung (siehe Kapitel 2.3, Folie 12), dass Spieler j damit ein Dummy-Spieler ist.
Es ist klar, dass ein Spieler nicht gleichzeitig ein Veto-Spieler und ein Dummy-Spieler sein kann. Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass in einfachen, konvexen Spielen jeder Spieler entweder ein Veto-Spieler oder ein Dummy-Spieler ist.

Aufgabe 2: Banzhaf Index

Sei das gewichtetes Wahlspiel $G = (10, 16, 12, 14, 4; 30)$ mit Spielermenge $P = \{1, \ldots, 5\}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie für alle Spieler den normalisierten Banzhaf Index.

Lösungsvorschlag: Wir berechnen zunächst für alle Spieler den rohen Banzhaf Index, welcher der Anzahl an Koalitionen entspricht, für die ein Spieler pivotal ist. Betrachte nun alle Koalitionen mit einem Gewicht von unter 30 und prüfe, welche Spieler für diese Koalitionen pivotal sind:

C	$w(C)$	1 pivotal?	2 pivotal?	3 pivotal?	4 pivotal?	5 pivotal?
$\{1\}$	10	-	✗	✗	✗	✗
$\{2\}$	16	✗	-	✗	✓	✗
$\{3\}$	12	✗	✗	-	✗	✗
$\{4\}$	14	✗	✓	✗	-	✗
$\{5\}$	4	✗	✗	✗	✗	-
$\{1,2\}$	26	-	-	✓	✓	✓
$\{1,3\}$	22	-	✓	-	✓	✗
$\{1,4\}$	24	-	✓	✓	-	✗
$\{1,5\}$	14	-	✓	✗	✗	-
$\{2,3\}$	28	✓	-	-	✓	✓
$\{2,5\}$	20	✓	-	✓	✓	-
$\{3,4\}$	26	✓	✓	-	-	✓
$\{3,5\}$	16	✗	✓	-	✓	-
$\{4,5\}$	18	✗	✓	✓	-	-
$\{1,3,5\}$	26	-	✓	-	✓	-
$\{1,4,5\}$	28	-	✓	✓	-	-

- Spieler 1 ist pivotal für alle Koalitionen C mit $1 \notin C$ und $20 \leq w(C) \leq 29$.
- Spieler 2 ist pivotal für alle Koalitionen C mit $2 \notin C$ und $14 \leq w(C) \leq 29$.
- Spieler 3 ist pivotal für alle Koalitionen C mit $3 \notin C$ und $18 \leq w(C) \leq 29$.
- Spieler 4 ist pivotal für alle Koalitionen C mit $4 \notin C$ und $16 \leq w(C) \leq 29$.
- Spieler 5 ist pivotal für alle Koalitionen C mit $5 \notin C$ und $26 \leq w(C) \leq 29$.

Zählt man diese Koalitionen, ergeben sich folgende rohe Banzhaf Indizes:

$$BI^*(G,1) = 3,\ BI^*(G,2) = 9,\ BI^*(G,3) = 5,\ BI^*(G,4) = 7,\ BI^*(G,5) = 3.$$

Die normalisierten Banzhaf Indizes sind dann:

$$\overline{BI}(G,1) = \frac{BI^*(G,1)}{BI^*(G,1) + \ldots + BI^*(G,5)} = \frac{3}{3+9+5+7+3} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

$$\overline{BI}(G,2) = 9/27 = 1/3$$

$$\overline{BI}(G,3) = 5/27$$

$$\overline{BI}(G,4) = 7/27$$

$$\overline{BI}(G,5) = 3/27 = 1/9$$

(b) Berechnen Sie für alle Spieler den probabilistischen Banzhaf Index.

Lösungsvorschlag: Die probabilistischen Banzhaf Indizes lassen sich über die bereits berechneten rohen Banzhaf Indizes berechnen:

$$
\begin{aligned}
BI(G,1) &= \frac{BI^*(G,1)}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16} \\
BI(G,2) &= {}^{9}/_{16} \\
BI(G,3) &= {}^{5}/_{16} \\
BI(G,4) &= {}^{7}/_{16} \\
BI(G,5) &= {}^{3}/_{16}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Vector Weighted Voting Games

(a) Geben Sie explizit die Spielermenge P und die charakteristische Funktion v des einfachen Spieles $G = (P, v)$ an, welches durch das 4-gewichtete Wahlspiel $G' = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4; \vec{q})$ mit

$$
\begin{aligned}
\vec{w}_1 =&(5,2,1,2), \\
\vec{w}_2 =&(3,1,4,8), \\
\vec{w}_3 =&(6,3,2,4), \\
\vec{w}_4 =&(2,3,3,6), \\
\vec{q} =&(8,3,5,10)
\end{aligned}
$$

repräsentiert wird.

Lösungsvorschlag: Es gilt $P = \{1,2,3,4\}$ und eine Koalition $C \subseteq P$ gewinnt, falls $w^j(C) = \sum_{i \in C} w_i^j \geq q^j$ für alle $1 \leq j \leq 4$ gilt.

Die charakteristische Funktion v ist daher wie folgt gegeben:

C	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$
$v(C)$	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

C	$\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$
$v(C)$	1	1	1	1	1	1

(b) Was ist die Dimension des einfachen Spiels G aus Teil (a)?

Lösungsvorschlag: Zunächst können wir feststellen, das G nicht Dimension 1 hat, denn dann müsste es ein gewichtetes Wahlspiel $G'' = (w_1, w_2, w_3, w_4; q)$

geben, für das unterer anderem gilt, dass

$$w_1 + w_2 \geq q, \tag{1}$$
$$w_1 + w_3 < q, \tag{2}$$
$$w_2 + w_4 < q, \tag{3}$$
$$w_3 + w_4 \geq q. \tag{4}$$

Dann folgt aus (1) und (4), dass $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 2q$ und aus (2) und (3), dass $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 < 2q$, ein Widerspruch. Somit muss G mindestens Dimension 2 haben.

Betrachte nun das 2-gewichtete Wahlspiel $G^* = (\vec{w}_1^*, \vec{w}_2^*, \vec{w}_3^*, \vec{w}_4^*; \vec{q}^*)$ mit

$$\begin{aligned} \vec{w}_1^* &= (5, 1), \\ \vec{w}_2^* &= (3, 4), \\ \vec{w}_3^* &= (6, 2), \\ \vec{w}_4^* &= (2, 3), \\ \vec{q}^* &= (8, 5) \end{aligned}$$

Dieses entspricht dem einfachen Spiel G aus Teil (a). Somit hat G Dimension 2.

Aufgabe 4: Eigenschaften des Shapley-Werts

Seien $G_1 = (P, v_1)$ und $G_2 = (P, v_2)$ zwei kooperative Spiele. Dann sind die kooperativen Spiele $G_\vee = (P, v_1 \vee v_2)$ und $G_\wedge = (P, v_1 \wedge v_2)$ definiert durch

$$\begin{aligned} &(v_1 \vee v_2)(C) = \max(v_1(C), v_2(C)) \text{ und} \\ &(v_1 \wedge v_2)(C) = \min(v_1(C), v_2(C)) \text{ für alle } C \subseteq P. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle $i \in P$ gilt, dass

$$\varphi_i(G_\vee) + \varphi_i(G_\wedge) = \varphi_i(G_1) + \varphi_i(G_2).$$

Lösungsvorschlag: Es gilt

$$
\begin{aligned}
\varphi_i(G_\vee) + \varphi_i(G_\wedge) &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_P} \Delta_\pi^{G_\vee}(i) + \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_P} \Delta_\pi^{G_\wedge}(i) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_P} \Big(\Delta_\pi^{G_\vee}(i) + \Delta_\pi^{G_\wedge}(i) \Big) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_P} \Big((v_1 \vee v_2)(S_\pi(i) \cup \{i\}) - (v_1 \vee v_2)(S_\pi(i)) \\
&\qquad\qquad (v_1 \wedge v_2)(S_\pi(i) \cup \{i\}) - (v_1 \wedge v_2)(S_\pi(i)) \Big) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_P} \Big(\max\big(v_1(S_\pi(i) \cup \{i\}), v_2(S_\pi(i) \cup \{i\}) \big) \\
&\qquad + \min\big(v_1(S_\pi(i) \cup \{i\}), v_2(S_\pi(i) \cup \{i\}) \big) \\
&\qquad - \max\big(v_1(S_\pi(i)), v_2(S_\pi(i)) \big) - \min\big(v_1(S_\pi(i)), v_2(S_\pi(i)) \big) \Big) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_P} \Big(v_1(S_\pi(i) \cup \{i\}) + v_2(S_\pi(i) \cup \{i\}) - v_1(S_\pi(i)) - v_2(S_\pi(i)) \Big) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_P} \Big(v_1(S_\pi(i) \cup \{i\}) - v_1(S_\pi(i)) \Big) \\
&\qquad + \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_P} \Big(v_2(S_\pi(i) \cup \{i\}) - v_2(S_\pi(i)) \Big) \\
&= \varphi_i(G_1) + \varphi_i(G_2).
\end{aligned}
$$