Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

(Lösungsvorschläge)

Blatt 9

Besprechung: 14. bis 16.12.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Gewichtete Wahlspiele

Sei $P = \{1, \ldots, n\}$ eine gegebene Menge an Spielern.

(a) Betrachten Sie das gewichtete Wahlspiel $G = (1, 2, \ldots, n; q)$ mit $q = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ und $n \geq 3$.

Welche der Eigenschaften *Monotonie*, *Superadditivität*, *Anonymität*, *nicht-leerer Kern*, *Konvexität* und *nicht-leere Imputationsmenge* erfüllt das Spiel für alle $n \geq 3$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

> **Lösungsvorschlag:**
>
> Das Spiel ist einfach, also monoton. (Das gilt für jedes gewichtete Wahlspiel.)
>
> Es ist nicht für alle n superadditiv, etwa für $n = 4$ gilt: $v(P) = 1 < 2 = 1 + 1 = v(\{1, 4\}) + v(\{2, 3\})$.
>
> Da das Spiel nicht für alle n superadditiv ist, ist es nicht für alle n konvex.
>
> Für $n = 3$ ist die Quote $q = 2$. Für eine Imputation (a_1, a_2, a_3) von G müsste gelten, dass $a_1 + a_2 + a_3 = v(P) = 1$, $a_1 \geq v(\{1\}) = 0$, $a_2 \geq v(\{2\}) = 1$ und $a_3 \geq v(\{3\}) = 1$. Das ist offensichtlich nicht möglich, also ist für $n = 3$ die Imputationsmenge leer. Damit gilt nicht, dass für alle n die Imputationsmenge nicht-leer ist.
>
> Da die Imputationsmenge für manche n leer ist, ist auch der Kern für manche n leer. Somit ist der Kern nicht für alle n nicht-leer.
>
> Das Spiel ist nicht für alle n anonym. Für $n = 3$ gilt zum Beispiel $v(\{1\}) = 0 \neq 1 = v(\{2\})$, obwohl $\|\{1\}\| = \|\{2\}\|$.

(b) Geben Sie einen möglichst kleinen, ganzzahligen Wert q' (in Abhängigkeit von n) an, so dass das Spiel $G' = (1, 2, \ldots, n; q')$ für alle $n \geq 3$ superadditiv ist. Begründen Sie ihre Wahl.

> **Lösungsvorschlag:** Da der Gewinn der großen Koalition bei gewichteten Wahlspielen stets 1 ist, müssen wir für die Superadditivität verhinden, dass zwei disjunkte Koalitionen beide gewinnen können. Wir müssen also verhindern, dass zwei disjunkte Koalitionen mit ihren Gewichten jeweils über die Quote kommen. Die Summe der Gewichte aller Spieler ist stets $1 + \ldots + n = {}^{n(n+1)}/_2$. Wenn die

Quote mehr als die Hälfte der Gesamtsumme der Gewichte ist, ist dieser Fall ausgeschlossen. Wähle also $q' = \lfloor \frac{n(n+1)}{4} \rfloor + 1$.

Zeige, dass es für dieses q' keine zwei disjunkten gewinnenden Koalitionen gibt: Angenommen, $C_1 \subset P$ und $C_2 \subset P$ sind zwei disjunkte Koalitionen mit $v(C_1) = 1$ und $v(C_2) = 1$. Dann gilt $w(C_1) \geq \lfloor \frac{n(n+1)}{4} \rfloor + 1$ und $w(C_2) \geq \lfloor \frac{n(n+1)}{4} \rfloor + 1$. In Summe gilt also:

$$w(C_1) + w(C_2) \geq 2\lfloor \frac{n(n+1)}{4} \rfloor + 2 \geq \lfloor \frac{n(n+1)}{2} \rfloor + 1 > \lfloor \frac{n(n+1)}{2} \rfloor = w(P)$$

Das ist ein Widerspruch, es kann also keine zwei disjunkten gewinnenden Koalitionen geben. Damit gewinnt in jeder Koalitionsstruktur immer höchstens eine Koalition und das Spiel ist damit superadditiv.

Würde man q' auf $\lfloor \frac{n(n+1)}{4} \rfloor$ setzen, gäbe es für gerade n offensichtlich noch zwei disjunkte gewinnende Koalitionen, zum Beispiel für $n = 4$: $C_1 = \{1, 4\}$ und $C_2 = \{2, 3\}$ mit $w(C_1) = w(C_2) = 5 = \lfloor \frac{4(4+1)}{4} \rfloor$.

Aufgabe 2: Äquivalente gewichtete Wahlspiele

Betrachten Sie die folgenden gewichteten Wahlspiele $G = (w_1, \dots, w_n; q)$. Geben Sie jeweils ein gewichtetes Wahlspiel $G' = (w'_1, \dots, w'_n; q')$ an, welches zu G äquivalent ist. Wählen Sie dabei die Gewichte und die Quote ganzzahlig und so klein wie möglich. Begründen Sie warum die Spiele äquivalent sind.

(a) $G = (w_1, \dots, w_4; q) = (100, 6, 198, 95;\ 200)$ mit Spielermenge $P = \{1, 2, 3, 4\}$.

Lösungsvorschlag: Betrachte $G' = (1, 1, 2, 1; 3)$. Dieses Spiel ist äquivalent zu G, denn für alle $C \subseteq P$ gilt $w(C) \geq q \Leftrightarrow w'(C) \geq q'$:

- Für alle C mit $\|C\| = 1$ verliert C in beiden Spielen.
- Für alle C mit $\|C\| = 2$ gilt, dass C in beiden Spielen gewinnt, falls $3 \in C$, und sonst verliert.
- Für alle C mit $\|C\| \geq 3$ gilt, dass C in beiden Spielen gewinnt.

(b) $G = (w_1, \dots, w_5; q) = (10, 20, 25, 5, 12;\ 31)$ mit Spielermenge $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Lösungsvorschlag: Betrachte $G' = (2, 4, 5, 1, 3; 7)$. Dieses Spiel ist äquivalent zu G, denn für alle $C \subseteq P$ gilt $w(C) \geq q \Leftrightarrow w'(C) \geq q'$:

- Für alle $C \subseteq P$ mit $\|C\| = 1$ gilt, dass C in beiden Spielen verliert.
- Für $C \subseteq P$ mit $\|C\| = 2$ gilt, dass C in beiden Spielen gewinnt, falls

$C = \{1,3\}$, $C = \{2,3\}$, $C = \{2,5\}$ oder $C = \{3,5\}$, und sonst verliert.

- Für $C = \{1,4,5\}$ gilt, dass C in beiden Spielen verliert.
- Für alle $C \subseteq P$ mit $\|C\| = 3$ und $C \neq \{1,4,5\}$ gilt, dass C in beiden Spielen gewinnt.
- Für alle $C \subseteq P$ mit $\|C\| \geq 4$ gilt, dass C in beiden Spielen gewinnt.

Aufgabe 3: Shapley-Wert

Berechnen Sie in den folgenden Spielen die Shapley-Werte der angegebenen Spieler und geben Sie an, ob es in dem jeweiligen Spiel einen Dummy-Spieler gibt.

Bedenken Sie dabei, dass der Shapley-Wert $\varphi_i(G)$ von Spieler i in einem einfachen Spiel G genau dem Shapley–Shubik Index $SSI(G,i)$ entspricht und beachten Sie, dass $0! = 1$.

(a) Spieler 1 im gewichteten Wahlspiel G von Aufgabe 1(a) mit $n = 8$ Spielern

Lösungsvorschlag: Für $n = 8$ ist das Spiel:

$$G = (w_1, \ldots, w_8; q) = (1,2,3,4,5,6,7,8;\ 16).$$

Wir suchen zunächst die Koalitionen, für die Spieler 1 einen positiven marginalen Beitrag hat (d.h. die Koalitionen, für die 1 ein entscheidender Spieler (*pivotal player*) ist). Es gilt $d_G(C,i) = v(C \cup \{1\}) - v(C) = 1$ für alle $C \subseteq P \setminus \{1\}$ mit $w(C) < q = 16$ und $w_1 + w(C) \geq q = 16$. Da $w_1 = 1$, gilt für diese Koalitionen also $w(C) = 16 - 1 = 15$. Spieler 1 hat also einen positiven marginalen Beitrag für alle Koalitionen mit summiertem Gewicht von 15, das sind die folgenden 8 Koalitionen:

$$\{7,8\}, \{3,4,8\}, \{2,5,8\}, \{2,6,7\}, \{3,5,7\}, \{4,5,6\}, \{2,3,4,6\}.$$

Es gilt also nach der Charakterisierung des Shapley-Werts mittels Shapley–Shubik Index, dass

$$\begin{aligned}
\varphi_1(G) &= \frac{1}{n!}\Big(\sum_{C \subseteq P \setminus \{1\}} \|C\|! \cdot (n - \|C\| - 1)! \cdot d_G(C,i)\Big) \\
&= \frac{1}{8!}(1 \cdot 2!(8-1-2)! + 5 \cdot 3!(8-1-3)! + 1 \cdot 4!(8-1-4)!) \\
&= \frac{1}{8!}(2!5! + 5 \cdot 3!4! + 4!3!) \\
&= \frac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{5 + 15 + 3}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{23}{840} \approx 0{,}02738.
\end{aligned}$$

Jeder Spieler i ist pivotal für alle Koalitionen anderer Spieler mit Gesamtgewicht $16-i$. Da für alle $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ mindestens eine Koalition mit Gewicht $16-i$ existiert, ist also jeder Spieler mindestens einmal pivotal und damit gibt es keine Dummy-Spieler.

(b) Spieler 1 im gewichteten Wahlspiel G' mit $m+1$ Spielern für ein $m \geq 1$ und

$$G' = (1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{m-1}; 2m-1)$$

Lösungsvorschlag: Spieler 1 ist pivotal für $C \subseteq P \setminus \{1\}$, wenn $w(C) = 2m-2$. Da Spieler 2 den einzigen ungeraden Wert eines Spielers in $P \setminus \{1\}$ hat, kann 2 nicht in C sein. Es gibt $m-1$ Spieler mit Wert 2, also genau eine Koalition mit Wert $2(m-1)$. Also ist

$$\begin{aligned}
\varphi_1(G') &= \frac{1}{n!}\Big(\sum_{C=\{3,\ldots,m+1\}} \|C\|! \cdot (n - \|C\| - 1)! \cdot d_G(C,i)\Big) \\
&= \frac{1}{(m+1)!}(m-1)!(m+1-(m-1)-1)! = \frac{(m-1)! \cdot 1}{(m+1)!} = \frac{1}{m(m+1)}.
\end{aligned}$$

Damit ist Spieler 1 kein Dummy-Spieler, und Spieler 2 ist aus Symmetriegründen ebenfalls kein Dummy-Spieler. Jeder der übrigen $m-1$ Spieler ist pivotal für die Koalition, die alle anderen Spieler bis auf Spieler 1 oder Spieler 2 enthält, damit sind auch diese keine Dummy-Spieler.

(c) allen drei Spielern im Spiel G^1 aus der Vorlesung (Kapitel 2.1, Folie 60)

Lösungsvorschlag: Es gilt $v(C) = 1$ für $C \in \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$. 1 ist also pivotal für alle drei Koalitionen $\{2\}$, $\{3\}$ und $\{2,3\}$; 2 und 3 sind nur für $\{1\}$ pivotal. Also gelten

$$\varphi_1(G^1) = \frac{1}{3!}(2 \cdot 1!(3-1-1)! + 1 \cdot 2!(3-2-1)! = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{3!} = \frac{2}{3}.$$

Für die anderen beiden Spieler gilt wegen der Effizienz

$$\varphi_2(G^1) = \varphi_3(G^1) = (1 - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Da kein Spieler einen Shapley-Wert von 0 hat, ist keiner ein Dummy-Spieler.

(d) einem Spieler i im Einstimmigkeitsspiel, das als gewichtetes Wahlspiel G'' mit $n \geq 1$ Spielern repräsentiert ist durch

$$G'' = \left(w_1, w_2, \ldots, w_n; \sum_{i=1}^{n} w_i\right)$$

Lösungsvorschlag: Für alle $i \in P$ gilt: i ist pivotal für $P \setminus \{i\}$ und sonst für keine Koalition. Damit ist kein Spieler ein Dummy-Spieler und es gilt

$$\varphi_i(G'') = \frac{1}{n!}(n-1)!(n-(n-1)-1)! = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe kann in zwei Teilen ((a)+(b), (c)+(d)) vorgerechnet werden und gibt insgesamt 2 Zulassungspunkte.

Aufgabe 4: Shapley-Wert und Dummy-Spieler

Geben Sie ein kooperatives Spiel an, in dem Spieler 1 einen Shapley-Wert von 0 hat, aber dennoch kein Dummy-Spieler ist (und weisen Sie beide Eigenschaften nach).

Lösungsvorschlag: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass ein kooperatives Spiel monoton sein muss, um zu garantieren, dass jeder Spieler mit Shapley-Wert 0 auch ein Dummy-Spieler ist.

Betrachte also $G = (P, v)$ mit $P = \{1, 2, 3\}$ und folgender (nicht-monotonen) charakteristischen Funktion v:

$$\begin{array}{llll} v(\emptyset) = 0 & v(\{1\}) = 0 & v(\{1,2\}) = 2 & v(\{1,2,3\}) = 2 \\ & v(\{2\}) = 1 & v(\{1,3\}) = 0 & \\ & v(\{3\}) = 1 & v(\{2,3\}) = 2 & \end{array}$$

Die marginalen Beiträge von Spieler 1 sind:

$$\begin{aligned}
\Delta^G_{123}(1) &= v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0 \\
\Delta^G_{132}(1) &= v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0 \\
\Delta^G_{213}(1) &= v(\{1,2\}) - v(\{2\}) = 2 - 1 = 1 \\
\Delta^G_{231}(1) &= v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 2 - 2 = 0 \\
\Delta^G_{312}(1) &= v(\{1,3\}) - v(\{3\}) = 0 - 1 = -1 \\
\Delta^G_{321}(1) &= v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

Damit ist der Shapley-Wert von Spieler 1:

$$\varphi_1(G) = \frac{1}{3!}(0 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0) = 0$$

Aber Spieler 1 ist kein Dummy-Spieler, da für $C = \{2\}$ gilt:

$$v(C \cup \{1\}) = 2 \neq 1 = v(C).$$