Übung zur Vorlesung
Algorithmische Spieltheorie
(Lösungsvorschläge)
Blatt 8
Besprechung: 07. bis 09.12.2022
Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Stabilitätskosten II
Betrachten Sie das Mehrheitsspiel mit vier Spielern, gegeben durch $G = (P, v)$, wobei $P = \{1, 2, 3, 4\}$ und

$$v(C) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|C\| \leq 2 \\ 1 & \text{falls } \|C\| > 2 \end{cases}$$

für alle $C \subseteq P$. Bestimmen Sie die Stabilitätskosten $\mathrm{CoS}(G)$ dieses Spiels.

Lösungsvorschlag: Das angepasste Spiel zu G ist $G_\Delta = (\{1, 2, 3, 4\}, v_\Delta)$ mit

$$v_\Delta(C) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|C\| \leq 2 \\ 1 & \text{falls } \|C\| = 3 \\ 1 + \Delta & \text{falls } \|C\| = 4, \text{ d.h. } C = P. \end{cases}$$

Suche nun das kleinste $\Delta \geq 0$, so dass der Kern von G_Δ nicht leer ist.
Eine Imputation $\vec{a} \in \mathscr{I}(G_\Delta)$ (d.h. ein Vektor $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_4)$ mit $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = v_\Delta(P) = 1 + \Delta$ und $a_i \geq v(\{i\}) = 0$ für $1 \leq i \leq 4$) liegt im Kern von G_Δ, wenn $a(C) \geq v_\Delta(C)$ für alle $C \subseteq P$ ist. Insbesondere bedeutet das für $\|C\| = 3$, dass $a_1 + a_2 + a_3 \geq 1$, $a_1 + a_2 + a_4 \geq 1$, $a_1 + a_3 + a_4 \geq 1$ und $a_2 + a_3 + a_4 \geq 1$. Also folgt, dass $a_i \leq \Delta$ für alle i, $1 \leq i \leq 4$.
Unter diesen Bedingungen ist Δ minimal für $a_i = 1/3$ für alle i, $1 \leq i \leq 4$, nämlich $\Delta = 1/3$. (Falls ein $a_i > 1/3$ ist, wird Δ größer wegen $a_i \leq \Delta$. Falls alle $a_i \leq 1/3$ sind und ein $a_i < 1/3$ ist, gilt für ein $C \subseteq P$ mit $\|C\| = 3$, dass $a(C) < 1$ ist.) Also sind die Stabilitätskosten $\mathrm{CoS}(G) = 1/3$.

Aufgabe 2: Stabile Mengen

Betrachten Sie das Spiel $G^1 = (\{1, 2, 3\}, v)$ aus der Vorlesung mit

$$v(C) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \in C \text{ und } \|C\| \geq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $S_{13} = \{(x, 0, 1 - x) \mid x \in [0, 1]\}$ eine stabile Menge von G^1 ist.

Lösungsvorschlag: Zunächst zeigen wir, dass interne Stabilität erfüllt ist. Betrachte zwei beliebige Vektoren $\vec{a} = (x, 0, 1-x)$ und $\vec{b} = (y, 0, 1-y)$ in S_{13}. Nehme für einen Widerspruch an, dass $\vec{a}$ $\vec{b}$ dominiert. Dann gilt $x > y$ und $1 - x > 1 - y$. Dies ist bereits unmöglich, also ein Widerspruch. Also gibt es keine Vektoren in S_{13}, die einander dominieren, und interne Stabilität ist erfüllt.

Nun zeigen wir, dass externe Stabilität erfüllt ist. Betrachte einen beliebigen Vektor $\vec{b} = (x, y, z) \in \mathscr{I}(G^1) \setminus S_{13}$. Da $\vec{b}$ eine Imputation und nicht in S_{13} ist, gilt $x + y + z = v(P) = 1$, $x, y, z \geq 0$ und $y > 0$.
Betrachte den Vektor $\vec{a} = (x + y/2, 0, z + y/2) \in S_{13}$ und die Koalition $C = \{1, 3\}$. $\vec{a}$ dominiert $\vec{b}$ via C, denn es gilt

- $a_1 = x + y/2 > x = b_1$, $a_3 = z + y/2 > z = b_3$ und
- $a(C) = a_1 + a_3 = x + y/2 + z + y/2 = x + y + z = 1 = v(C)$.

Somit wird jeder beliebige Vektor in $\mathscr{I}(G^1) \setminus S_{13}$ von einem Vektor in S_{13} dominiert und externe Stabilität ist erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass $S_{23} = \{(0, x, 1-x) \mid x \in [0, 1]\}$ keine stabile Menge von G^1 ist.

Lösungsvorschlag: Wir zeigen, dass externe Stabilität verletzt ist, woraus folgt, dass S_{23} keine stabile Menge ist.

Widerspruchsannahme: Angenommen, es gilt externe Stabilität. Betrachte $\vec{b} = (1, 0, 0) \in \mathscr{I}(G^1) \setminus S_{23}$. Dann gibt es ein $\vec{a} \in S_{23}$ und ein $C \subseteq N, C \neq \emptyset$, so dass $\vec{b}$ von $\vec{a}$ via C dominiert wird. Das heißt (1) $a_i > b_i \, \forall i \in C$ und (2) $\sum_{i \in C} a_i \leq v(C)$.

Aus (1) folgt $a_i > 0 \, \forall i \in C$. Also gilt $1 \notin C$, da $a_1 = 0$. Nach der Definition von v folgt daraus $v(C) = 0$. Also folgt wegen (2), dass $a_i \leq 0, \forall i \in C$. Dies ist ein Widerspruch, da $C \neq \emptyset$.

Bemerkung: Interne Stabilität ist erfüllt.

Aufgabe 3: Eigenschaften kooperativer Spiele

Betrachten Sie die drei kooperativen Spiele mit übertragbarem Nutzen G_1, G_2 und G_3 mit Spielermenge $P = \{1, 2, 3\}$ und folgenden charakteristischen Funktionen:

C	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_1(C)$	0	0	0	0	1	1	1	2
$v_2(C)$	0	0	0	0	1	0	1	1
$v_3(C)$	0	0	1	1	1	1	0	1

Beantworten und begründen Sie für jedes der Spiele, ob es monoton ist, superadditiv ist, konvex ist, einfach ist, anonym ist und ob es eine leere Imputationsmenge hat.

(a) $G_1 = (P, v_1)$ (b) $G_2 = (P, v_2)$ (c) $G_3 = (P, v_3)$

Lösungsvorschlag: Eigenschaften eines Spiels $G = (P, v)$:

Monotonie: $v(C) \leq v(D)$ für alle $C \subseteq D \subseteq P$.

Superadditivität: $v(C \cup D) \geq v(C) + v(D)$ für alle $C, D \subseteq P$, $C \cap D = \emptyset$.

Konvexität: $v(C \cup D) + v(C \cap D) \geq v(C) + v(D)$ für alle $C, D \subseteq P$.

Einfachheit: $v(C) \in \{0, 1\}$ für alle $C \subseteq P$, monoton, $v(\emptyset) = 0$, $v(P) = 1$.

Anonymität: $v(C) = v(D)$ für alle $C, D \subseteq P$, $\|C\| = \|D\|$.

leere Imputationsmenge: $v(P) < \sum_{i \in P} v(\{i\})$ (vgl. Blatt 7, Aufgabe 2).

(a) Spiel G_1:

- G_1 ist anonym, da $v_1(\{1\}) = v_1(\{2\}) = v_1(\{3\}) = 0$ und $v_1(\{1,2\}) = v_1(\{1,3\}) = v_1(\{2,3\}) = 1$.
- Das Spiel ist konvex: Für $C = D$, $C = \emptyset$ oder $D = \emptyset$ ist die Ungleichung immer erfüllt. Für die anderen möglichen Belegungen von C und D gilt:

$$\begin{aligned}
&v(\{1,2\}) + v(\emptyset) = 1 \geq 0 = v(\{1\}) + v(\{2\}),\\
&v(\{1,2\}) + v(\{1\}) = 1 \geq 1 = v(\{1,2\}) + v(\{1\}),\\
&v(\{1,2,3\}) + v(\emptyset) = 2 \geq 1 = v(\{1,2\}) + v(\{3\}),\\
&v(\{1,2,3\}) + v(\{1\}) = 2 \geq 2 = v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}),\\
&v(\{1,2,3\}) + v(\{1\}) = 2 \geq 2 = v(\{1,2,3\}) + v(\{1\}),\\
&v(\{1,2,3\}) + v(\{1,2\}) = 3 \geq 3 = v(\{1,2,3\}) + v(\{1,2\}).
\end{aligned}$$

  Alle anderen Fälle sind wegen der Anonymität analog.
- Aus Konvexität folgen auch Superadditivität und Monotonie.
- Das Spiel ist nicht einfach, da $v(\{1,2,3\}) = 2 \notin \{0,1\}$.
- Da das Spiel konvex ist, hat es einen nicht-leeren Kern, also auch eine nicht-leere Imputationsmenge.

(b) Spiel G_2:

- Das Spiel G_2 ist nicht anonym, da etwa $v(\{1,2\}) = 1 \neq 0 = v(\{1,3\})$.

- Das Spiel ist superadditiv: Für $C = \emptyset$ oder $D = \emptyset$ ist die Ungleichung immer erfüllt. Für die anderen möglichen Belegungen von C und D gilt:

$$v(\{1,2\}) = 1 \geq 0 = v(\{1\}) + v(\{2\}), v(\{1,3\}) = 0 \geq 0 = v(\{1\}) + v(\{3\}),$$
$$v(\{2,3\}) = 1 \geq 0 = v(\{2\}) + v(\{3\}), v(\{1,2,3\}) = 1 \geq 1 = v(\{1,2\}) + v(\{3\}),$$
$$v(\{1,2,3\}) = 1 \geq 0 = v(\{1,3\}) + v(\{2\}), v(\{1,2,3\}) = 1 \geq 1 = v(\{2,3\}) + v(\{1\}).$$

- Das Spiel ist nicht konvex, da etwa $v(\{1,2,3\}) + v(\{2\}) = 1 < 2 = v(\{1,2\}) + v(\{2,3\})$.
- Aus der Superadditivität folgt Monotonie.
- Da alle Werte in $\{0,1\}$ liegen, $v(\emptyset) = 0$ und $v(P) = 1$, ist das Spiel einfach.
- Spieler 2 ist ein Veto-Spieler, da $v(P \setminus \{2\}) = v(\{1,3\}) = 0$ ist. Also ist der Kern nicht leer, also auch nicht die Imputationsmenge.

(c) Spiel G_3:

- Das Spiel G_3 ist nicht anonym, da etwa $v(\{1\}) = 0 \neq 1 = v(\{2\})$.
- Das Spiel ist nicht monoton, da etwa $v(\{2\}) = 1 > 0 = v(\{2,3\})$.
- Daher ist das Spiel weder superadditiv, noch konvex, noch einfach.
- Die Imputationsmenge ist leer, denn $v(P) = 1 < 2 = v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})$.

Übersicht:

G	monoton	superad.	konvex	einfach	anonym	$\mathcal{I}(G)$
G_1	✓	✓	✓	–	✓	–
G_2	✓	✓	–	✓	–	–
G_3	–	–	–	–	–	✓

Aufgabe 4: Vetospieler in einfachen Spielen

Sei $G = (P, v)$ ein einfaches Spiel. $\mathscr{W} = \{C \subseteq P \mid v(C) = 1\}$ bezeichne die Menge aller gewinnenden Koalitionen und es gelte $P \in \mathscr{W}$ und $\emptyset \notin \mathscr{W}$. G heißt

- schwach (*weak*), wenn $\bigcap_{C \in \mathscr{W}} C \neq \emptyset$; und
- diktatorisch (*dictatorial*), wenn es einen Spieler $j \in P$ gibt mit $C \in \mathscr{W} \iff j \in C$.

(a) Ist G genau dann diktatorisch, wenn es mindestens einen Vetospieler enthält?

Lösungsvorschlag: Nein. Die Implikation von links nach rechts gilt. (Wenn G diktatorisch ist, dann gibt es mindestens einen Vetospieler.) Aber die andere Implikation gilt nicht.

Betrachte das einfache Spiel $G = (P, v)$ mit $P = \{1, 2\}$ und folgender charakteristischer Funktion v:

C	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v(C)$	0	0	0	1

Dann sind Spieler 1 und 2 Vetospieler (denn sie sind in allen gewinnenden Koalition enthalten). Jedoch ist G nicht diktatorisch, da es für beide Spieler i eine Koalition C mit $i \in C$ gibt (nämlich $C = \{i\}$), für die $C \notin \mathscr{W}$ gilt.

(b) Ist G genau dann schwach, wenn es mindestens einen Vetospieler enthält?

Lösungsvorschlag: Zu zeigen: Es gibt einen Veto-Spieler $\Leftrightarrow \bigcap_{C \in \mathscr{W}} C \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$: Sei i ein Veto-Spieler. Nach Definition gilt dann für alle $C \subseteq P \setminus \{i\}$, dass $v(C) = 0$, also $C \notin \mathscr{W}$. Für alle $C \in \mathscr{W}$ muss also $i \in C$ gelten. Also gilt $i \in \bigcap_{C \in \mathscr{W}} C$. Also $\bigcap_{C \in \mathscr{W}} C \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$: Sei $\bigcap_{C \in \mathscr{W}} C \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $i \in \bigcap_{C \in \mathscr{W}} C$. Da i in allen gewinnenden Koalitionen $C \in \mathscr{W}$ enthalten ist, gilt für alle $C \subseteq P \setminus \{i\}$, dass $C \notin \mathscr{W}$, also $v(C) = 0$. Somit ist i ein Veto-Spieler.

Beweisen Sie jeweils ihre Antwort.