Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

(Lösungsvorschläge)

Blatt 7

Besprechung: 30.11. bis 02.12.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Superadditive Überdeckung

(a) Betrachten Sie das Spiel von Blatt 6 Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Spiel nicht superadditiv ist. Bestimmen Sie die superadditive Überdeckung (*cover*) des Spiels.

Lösungsvorschlag: Das Spiel ist nicht superadditiv, da etwa für die disjunkten Mengen $\{1,2\}$ und $\{3\}$ die Ungleichung nicht erfüllt ist:

$$v(\{1,2\}) + v(\{3\}) = 2 + 2 = 4 \not\leq 3 = v(\{1,2,3\}).$$

Die superadditive Überdeckung (P, v^*) mit

$$v^*(C) = \max_{\mathfrak{C} \in \mathscr{C}\mathscr{S}_C} v(\mathfrak{C}) = \max_{\mathfrak{C} \in \mathscr{C}\mathscr{S}_C} \sum_{C \in \mathfrak{C}} v(C)$$

sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
v^*(\emptyset) = 0, v^*(\{1\}) = 0, v^*(\{2\}) &= 1, v^*(\{3\}) = 2,\\
v^*(\{1,2\}) &= \max\{v(\{1,2\}), v(\{1\}) + v(\{2\})\} = \max\{2, 0+1\} = 2,\\
v^*(\{1,3\}) &= \max\{v(\{1,3\}), v(\{1\}) + v(\{3\})\} = \max\{2, 0+2\} = 2\\
v^*(\{2,3\}) &= \max\{v(\{2,3\}), v(\{2\}) + v(\{3\})\} = \max\{2, 1+2\} = 3\\
v^*(\{1,2,3\}) &= \max\{v(\{1,2,3\}), v(\{1,2\}) + v(\{3\}), v(\{1,3\}) + v(\{2\}),\\
&\qquad v(\{1\}) + v(\{2,3\}), v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})\}\\
&= \max\{3, 2+2, 2+1, 0+2, 0+1+2\} = 4.
\end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie das folgende kooperative Spiel. Sei P eine endliche Menge von $n \geq 3$ Spielern und die charakteristische Funktion wie folgt gegeben:

$$v(C) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|C\| \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } \|C\| \text{ gerade} \end{cases}$$

für jede Koalition $C \subseteq P$, $C \neq \emptyset$, und $v(\emptyset) = 0$.

Zeigen Sie, dass das Spiel nicht superadditiv ist. Bestimmen Sie die superadditive Überdeckung des Spiels.

Lösungsvorschlag: Das Spiel ist nicht superadditiv, da es nicht monoton ist, etwa gilt für $C \subseteq D$ mit $\|C\|$ gerade und $\|D\|$ ungerade, dass $v(C) = 1 > v(D) = 0$. Alternativ kann man das auch direkt zeigen, etwa mit $\|C\|$ und $\|D\|$ gerade.

Die superadditive Überdeckung (P, v^*) ist folgende:

Falls $\|C\| = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, gilt $\max_{\mathfrak{C} \in \mathscr{C}\mathscr{S}_C} v(\mathfrak{C}) = k$. Dieses Maximum ist etwa für $\mathfrak{C} = \{\{c_1, c_2\}, \ldots, \{c_{2k-1}, c_{2k}\}\}$ erreicht. Ein Zusammenschluss von Koalitionen innerhalb einer solchen Struktur mit nur Zweierkoalitionen würde einen geringeren Wert erbringen, genauso ein Aufteilen einer Zweierkoalition in zwei Koalitionen mit je einem Spieler.

Falls $\|C\| = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, gilt ebenfalls $\max_{\mathfrak{C} \in \mathscr{C}\mathscr{S}_C} v(\mathfrak{C}) = k$, etwa für $\mathfrak{C} = \{\{c_1, c_2\}, \ldots, \{c_{2k-1}, c_{2k}\}, \{c_{2k+1}\}\}$. Gleiche Begründung wie oben.

(P, v^*) ist also das Spiel mit Menge P von n Spielern und der charakteristischen Funktion:

$$v^*(C) = \begin{cases} \frac{\|C\|}{2} & \text{falls } \|C\| \text{ gerade} \\ \frac{\|C\|-1}{2} & \text{falls } \|C\| \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Imputationen

Gegeben sei ein kooperatives Spiel mit übertragbarem Nutzen $G = (P, v)$. Zeigen Sie, dass die Menge der Imputationen $\mathscr{I}(G)$ genau dann nicht leer ist, wenn $v(P) \geq \sum_{i \in P} v(\{i\})$ gilt.

Lösungsvorschlag: Sei $G = (P, v)$ mit $\|P\| = n$ Spielern. Zu zeigen:

$$\mathscr{I}(G) \neq \emptyset \iff v(P) \geq \sum_{i \in P} v(\{i\}).$$

$\Rightarrow$: Aus $\mathscr{I}(G) \neq \emptyset$ folgt, dass es einen Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\sum_{i=1}^n a_i = v(P)$ (Effizienz) und $a_i \geq v(\{i\})$ für alle $i \in P$ (individuelle Rationalität) gelten. Also gilt

$$v(P) \overset{\text{Effizienz}}{=} \sum_{i=1}^n a_i \overset{\text{indiv. Rationalität}}{\geq} \sum_{i=1}^n v(\{i\}).$$

$\Leftarrow$: Sei $v(P) \geq \sum_{i \in P} v(\{i\})$. Dann betrachte den folgende Auszahlungensvektor $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \left(v(\{1\}), v(\{2\}), \ldots, v(\{n-1\}), v(P) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) \right)$$

$\vec{a}$ ist eine Imputation, denn $\vec{a}$ ist effizient:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\})\right) + v(P) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) = v(P)$$

und $\vec{a}$ ist individuell rational, denn $a_i = v(\{i\})$ für alle i, $1 \leq i \leq n-1$ und

$$a_n = v(P) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) = v(\{n\}) + \underbrace{v(P) - \sum_{i \in P} v(\{i\})}_{\geq 0 \text{ nach Voraussetzung}} \geq v(\{n\}).$$

Aufgabe 3: Auszahlungsvektoren im Kern

Betrachten Sie das folgende allgemeine Mehrheitsspiel. Sei P eine endliche Menge von $n \geq 3$ Spielern und die charakteristische Funktion wie folgt für jede Koalition $C \subseteq P$ gegeben.

$$v(C) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|C\| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 1 & \text{falls } \|C\| > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass der Kern dieses Spiels leer ist.

Lösungsvorschlag: *Es handelt sich um eine leichte Abwandlung von Beispiel 260.3 in Osbourne und Rubinstein, 1994, "A Course in Game Theory".*
Angenommen, der Kern ist nicht leer, das heißt, es gibt ein Element $\vec{a}$ im Kern, also gilt $a(C) \geq v(C)$ für alle $C \subseteq P$. Inbesondere gilt $a(P) \geq v(P)$ und wegen der Definition eines Auszahlungsvektors $a(P) = v(P) = 1$ (Effizienz). Für eine Koalition C der Größe $\|C\| = n-1$ gilt $v(C) = 1$, da $n \geq 3$ ist und hier entsprechend $\|C\| > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ gilt. Also ist $a(C) = \sum_{i \in C} a_i \geq 1$. Betrachte nun die Summe über die Auszahlungen innerhalb aller Koalitionen der Größe $n-1$. Es gilt

$$\sum_{C \subseteq P, \|C\| = n-1} a(C) = \sum_{C \subseteq P, \|C\| = n-1} \sum_{i \in C} a_i \geq n, \tag{1}$$

da es n solche Koalitionen gibt. Umgekehrt gilt aber auch

$$\sum_{C \subseteq P, \|C\| = n-1} a(C) = \sum_{C \subseteq P, \|C\| = n-1} \sum_{i \in C} a_i = \sum_{C \subseteq P, \|C\| = n-1} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \sum_{i \notin C} a_i\right).$$

Da jedes i in genau einer Koalition C der Größe $n-1$ nicht vorkommt, ist das gleich

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{i=1}^{n} a_i = (n-1) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{=a(P)=1} = n-1.$$

Das ist ein Widerspruch zu (1). Daher war die Annahme falsch, das heißt, es gibt keinen Auszahlungsvektor, der im Kern liegt.

Nachtrag: *Es gibt eine kürzere Lösung.* Angenommen, der Kern ist nicht leer, das heißt, es gibt eine Imputation $\vec{a}$ im Kern. Für $\vec{a}$ gilt dann

(a) $a(P) = v(P) = 1$,

(b) $a_i \geq v(\{i\}) = 0$ für alle $i \in P$ und

(c) $a(C) \geq v(C)$ für alle $C \subseteq P$.

Aus (a) folgt, dass es ein $j \in P$ mit $a_j > 0$ geben muss. Betrachte nun $C = P \setminus \{j\}$. Diese Koalition hat Kardinalität $\|C\| = n-1 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und somit gilt $v(C) = 1$. Dann gilt aber $a(C) = 1 - a_j < 1 = v(C)$, was ein Widerspruch zu (c) ist. Also war die Annahme falsch und der Kern des Spiels ist leer.

Aufgabe 4: ε-Kern

(a) Betrachten Sie das Mehrheitsspiel mit vier Spielern, gegeben durch $G = (P, v)$, wobei $P = \{1, 2, 3, 4\}$ und

$$v(C) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|C\| \leq 2 \\ 1 & \text{falls } \|C\| > 2 \end{cases}$$

für alle $C \subseteq P$.

Aus Aufgabe 3 ist bekannt, dass der Kern dieses Spiels leer ist. Zeigen Sie, dass der kleinste Kern (engl.: *least core*) dieses Spiels der $({}^1\!/_4)$-Kern ist.

Lösungsvorschlag: Zu zeigen: Der kleinste Kern ist der ${}^1\!/_4$-Kern.

Zum einen liegt $\vec{a} = ({}^1\!/_4, {}^1\!/_4, {}^1\!/_4, {}^1\!/_4)$ im ${}^1\!/_4$-Kern, denn es ist ein Auszahlungsvektor ($\sum_{i=1}^{4} a_i \leq 1 = v(P)$ und $a_i \geq 0$ für alle i, $1 \leq i \leq 4$) mit $a(P) = v(P)$

und für alle $C \subseteq P$ ist $a(C) \geq v(C) - 1/4$:

$$\text{Für } \|C\| \in \{0,1,2\} : v(C) = 0, a(C) \geq 0 - \frac{1}{4}.$$
$$\text{Für } \|C\| = 3 : v(C) = 1, a(C) = \frac{3}{4} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$
$$\text{Für } \|C\| = 4 : C = P, v(C) = 1, a(C) = 1 \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Also ist der $1/4$-Kern eine obere Schranke für den kleinsten Kern.

Da die Ungleichung für $\|C\| = 3$ eine Gleichung ist, liegt $\vec{a}$ in keinem ε-Kern für $\varepsilon < 1/4$. Jeder andere Auszahlungsvektor $\vec{a}'$ liegt nur in einem größeren ε-Kern, denn: Sei ohne Einschränkung a'_1 das Maximum aller a'_i, $1 \leq i \leq 4$. Dann gilt $a'_1 > 1/4$. Dann gilt allerdings $a'_2 + a'_3 + a'_4 = 1 - a'_1 < 3/4$, also ist $a(\{2,3,4\}) < v(\{2,3,4\}) - 1/4 = 3/4$. Also liegt $\vec{a}'$ nicht im $1/4$-Kern.

Insgesamt ist also der $1/4$-Kern, der nur das Element $\vec{a}$ enthält, der kleinste Kern.

(b) Betrachten Sie nun das Spiel $G = (P, v)$ mit $\|P\| = n$ und

$$v(C) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|C\| \leq n-2 \\ 1 & \text{falls } \|C\| > n-2 \end{cases}$$

für alle $C \subseteq P$. Bestimmen Sie den kleinsten Kern für dieses Spiel und einen Auszahlungsvektor $\vec{a}$, der darin liegt.

Lösungsvorschlag: Sei der kleinste Kern in diesem Spiel der $\tilde{\varepsilon}$-Kern. Dann gibt es einen Auszahlungsvektor $\vec{a}$ im $\tilde{\varepsilon}$-Kern, d. h., es gilt $a(P) = v(P) = 1$ und

- für $C \subseteq P$ mit $\|C\| \leq n-2$ gilt $a(C) \geq 0 - \tilde{\varepsilon}$.
- für alle $C = P \backslash \{i\}$ mit $1 \leq i \leq n$ gilt, dass $a(C) = 1 - a_i \geq 1 - \tilde{\varepsilon} = v(C) - \tilde{\varepsilon}$, also $a_i \leq \tilde{\varepsilon}$.
- für $C = P$, dass $a(P) = 1 \geq 1 - \tilde{\varepsilon} = v(P) - \tilde{\varepsilon}$.

Da $a(P) = \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ und $a_i \leq \tilde{\varepsilon}$ für alle i gilt, ist $\tilde{\varepsilon}$ minimal falls $a_i = 1/n$ für alle i gilt, nämlich $\tilde{\varepsilon} = 1/n$. Denn: Falls ein $a_i > 1/n$ ist, wird $\tilde{\varepsilon}$ größer und, falls ein $a_i < 1/n$ ist, ist ein anderes $a_j > 1/n$ und $\tilde{\varepsilon}$ wird ebenfalls größer.

Aufgabe 5: Stabilitätskosten

Betrachten Sie folgende Variante des aus der Vorlesung bekannten Eis-Spiels. Die Spieler sind Anna, Belle und David, die jeweils 1€ zur Verfügung haben. Es werden zwei Packungen

Eiscreme zum Kauf angeboten: die Erste enthält 1000g und kostet 2€, die Andere enthält 1250g und kostet 2,30€.

Formal wird dieses Spiel dargestellt als $G = (\{A, B, D\}, v)$, wobei die charakteristische Funktion v für jede Koalition die maximale Menge Eis angibt, die diese Koalition sich insgesamt leisten kann.

(a) Geben Sie die Werte der charakteristischen Funktion v für alle Koalitionen an.

> **Lösungsvorschlag:**

C	$\emptyset$	$\{A\}$	$\{B\}$	$\{D\}$	$\{A,B\}$	$\{A,D\}$	$\{B,D\}$	$\{A,B,D\}$
$v(C)$	0	0	0	0	1000	1000	1000	1250

(b) Zeigen Sie, dass der Kern dieses Spiels leer ist.

> **Lösungsvorschlag:** Angenommen, der Kern wäre nicht leer, dann gäbe es eine Imputation $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, die im Kern liegt. Das heißt unter anderem, dass $a_1 + a_2 + a_3 = 1250$ und $a_i + a_j \geq 1000$ für alle i und j, $1 \leq i \neq j \leq 3$, also $a_k \leq 250$ für alle k, $1 \leq k \leq 3$. Aus der letzten Bedingung folgt allerdings, dass $a_1 + a_2 + a_3 \leq 3 \cdot 250 = 750 < 1250$ ist, ein Widerspruch zur ersten Bedingung. Also ist der Kern von G leer.

(c) Zeigen Sie, dass die Stabilitätskosten $\mathrm{CoS}(G) \leq 250$ sind.

> **Lösungsvorschlag:** Sei $\Delta = 250$. Zu zeigen: Der Kern von G_Δ ist nicht leer. Es gilt $G_\Delta = (P, v_\Delta)$ mit $v_\Delta(C) = v(C)$ für $C \neq P$ und $v_\Delta(P) = v(P) + \Delta$.
>
> $\vec{a} = (500, 500, 500)$ ist eine Imputation im Kern von G_Δ, da für alle $C \subseteq P$ gilt, dass $a(C) \geq v_\Delta(C)$:
>
> - Für $\|C\| = 1$ gilt $a(C) = 500 \geq 0 = v(C) = v_\Delta(C)$.
> - Für $\|C\| = 2$ gilt $a(C) = 1000 \geq 1000 = v(C) = v_\Delta(C)$.
> - Für $\|C\| = 3$ gilt $a(C) = 1500 \geq 1250 + 250 = v(C) + \Delta = v_\Delta(C)$.

(d) Zeigen Sie, dass die Stabilitätskosten $\mathrm{CoS}(G) \geq 250$ sind.

> **Lösungsvorschlag:** Sei $0 \leq \Delta < 250$. Zu zeigen: Der Kern von G_Δ ist leer. Angenommen, der Kern wäre nicht leer, dann gäbe es eine Imputation $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, die im Kern liegt. Das heißt unter anderem, dass $a_1 + a_2 + a_3 = 1250 + \Delta$ und $a_i + a_j \geq 1000$ für alle i und j, $1 \leq i \neq j \leq 3$, also $a_k \leq 250 + \Delta < 500$ für alle k, $1 \leq k \leq 3$. Daraus folgt allerdings, dass $a_i + a_j < 2 \cdot 500 = 1000$ für alle i und j, $1 \leq i \neq j \leq 3$ gilt, ein Widerspruch zur zweiten Bedingung. Also ist der Kern von G_Δ leer. Das heißt 250 ist eine untere Schranke für die

Stabilitätskosten. Also gilt insgesamt $\mathrm{CoS}(G) = 250$.