Prof. Dr. J. Rothe Düsseldorf, 22.11.2022

Übung zur Vorlesung
Algorithmische Spieltheorie

Blatt 7

Besprechung: 30.11. bis 02.12.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Superadditive Überdeckung

(a) Betrachten Sie das Spiel von Blatt 6 Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Spiel nicht superadditiv ist. Bestimmen Sie die superadditive Überdeckung (*cover*) des Spiels.

(b) Betrachten Sie das folgende kooperative Spiel. Sei P eine endliche Menge von $n \geq 3$ Spielern und die charakteristische Funktion wie folgt gegeben:

$$v(C) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|C\| \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } \|C\| \text{ gerade} \end{cases}$$

für jede Koalition $C \subseteq P$, $C \neq \emptyset$, und $v(\emptyset) = 0$.

Zeigen Sie, dass das Spiel nicht superadditiv ist. Bestimmen Sie die superadditive Überdeckung des Spiels.

Aufgabe 2: Imputationen

Gegeben sei ein kooperatives Spiel mit übertragbarem Nutzen $G = (P, v)$. Zeigen Sie, dass die Menge der Imputationen $\mathscr{I}(G)$ genau dann nicht leer ist, wenn $v(P) \geq \sum_{i \in P} v(\{i\})$ gilt.

Aufgabe 3: Auszahlungsvektoren im Kern

Betrachten Sie das folgende allgemeine Mehrheitsspiel. Sei P eine endliche Menge von $n \geq 3$ Spielern und die charakteristische Funktion wie folgt für jede Koalition $C \subseteq P$ gegeben.

$$v(C) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|C\| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 1 & \text{falls } \|C\| > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass der Kern dieses Spiels leer ist.

Aufgabe 4: ε-Kern

(a) Betrachten Sie das Mehrheitsspiel mit vier Spielern, gegeben durch $G = (P, v)$, wobei $P = \{1, 2, 3, 4\}$ und

$$v(C) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|C\| \leq 2 \\ 1 & \text{falls } \|C\| > 2 \end{cases}$$

für alle $C \subseteq P$.

Aus Aufgabe 3 ist bekannt, dass der Kern dieses Spiels leer ist. Zeigen Sie, dass der kleinste Kern (engl.: *least core*) dieses Spiels der ($^1/_4$)-Kern ist.

(b) Betrachten Sie nun das Spiel $G = (P, v)$ mit $\|P\| = n$ und

$$v(C) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \|C\| \leq n-2 \\ 1 & \text{falls } \|C\| > n-2 \end{cases}$$

für alle $C \subseteq P$. Bestimmen Sie den kleinsten Kern für dieses Spiel und einen Auszahlungsvektor $\vec{a}$, der darin liegt.

Aufgabe 5: Stabilitätskosten

Betrachten Sie folgende Variante des aus der Vorlesung bekannten Eis-Spiels. Die Spieler sind Anna, Belle und David, die jeweils 1€ zur Verfügung haben. Es werden zwei Packungen Eiscreme zum Kauf angeboten: die Erste enthält 1000g und kostet 2€, die Andere enthält 1250g und kostet 2,30€.

Formal wird dieses Spiel dargestellt als $G = (\{A, B, D\}, v)$, wobei die charakteristische Funktion v für jede Koalition die maximale Menge Eis angibt, die diese Koalition sich insgesamt leisten kann.

(a) Geben Sie die Werte der charakteristischen Funktion v für alle Koalitionen an.

(b) Zeigen Sie, dass der Kern dieses Spiels leer ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Stabilitätskosten $\mathrm{CoS}(G) \leq 250$ sind.

(d) Zeigen Sie, dass die Stabilitätskosten $\mathrm{CoS}(G) \geq 250$ sind.