Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

(Lösungsvorschläge)

Blatt 6

Besprechung: 23. bis 25.11.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: MinMax- und MaxMin-Strategien bestimmen

(a) Geben Sie zwei unterschiedliche Methoden konkret an, mit denen man für ein Zwei-Spieler-Spiel in Normalform mit je zwei Strategien pro Spieler den MaxMin- und den MinMax-Wert von Spieler 1 berechnen kann.

Lösungsvorschlag:

• Beide Werte stimmen nach Minimax-Theorem mit den Gewinnen in Nash-Equilibria der entsprechenden Nullsummenspiele überein. Allgemein lässt sich der MaxMin-Wert von Spieler 1 also so bestimmen, dass man zunächt das zugehörige Nullsummenspiel aus der Sicht von Spieler 1 bestimmt und davon das Nash-Gleichgewicht bestimmt. Der erwartete Gewinn von Spieler 1 in dem Nash-Gleichgewicht ist nach dem Minimax-Theorem der MaxMin-Wert von Spieler 1. Gleiches gilt für den MinMax-Wert.

• Die MaxMin- und MinMax-Werte lassen sich auch direkt über die Definitionen bestimmen. Sei ein 2-Spieler-Spiel mit je zwei Strategien in Normalform gegeben:

		Spieler 2	
		c	d
Spieler 1	a	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)
	b	(x_3, y_3)	(x_4, y_4)

Dann gilt für den MaxMin-Wert für Spieler 1

$$\max_{\pi_1 \in \Pi_1} \min_{\pi_2 \in \Pi_2} G_1(\pi_1, \pi_2) = \max_{0 \leq p \leq 1} \min_{0 \leq q \leq 1} \underbrace{(x_1 pq + x_2 p(1-q) + x_3(1-p)q + x_4(1-p)(1-q))}_{f(p,q)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Die Funktion } f(p,q) &= x_1 pq + x_2 p(1-q) + x_3(1-p)q + x_4(1-p)(1-q) \\ &= ((x_1 - x_2 - x_3 + x_4)p + (x_3 - x_4))q + (x_2 - x_4)p + x_4 \end{aligned}$$

ist für q, $0 \leq q \leq 1$, minimal an den Rändern des Definitionsbereichs von q, $q = 0$ oder $q = 1$, da $\frac{\partial f(p,q)}{\partial q} = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)p + (x_3 - x_4)$ konstant in q und im Allgemeinen ungleich 0 ist. Es gilt

$$f(p,0) = (x_2 - x_4)p + x_4,$$
$$f(p,1) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_2 - x_4)p + x_3 - x_4 + x_4 = (x_1 - x_3)p + x_3.$$

Also ist das Minimum der Funktion über alle q, $0 \le q \le 1$,

$$\min_{0\le q\le 1} f(p,q) = \min\{(x_2 - x_4)p + x_4, (x_1 - x_3)p + x_3\}.$$

Das heißt, der MaxMin-Wert für Spieler 1 ist

$$\max_{\pi_1\in\Pi_1} \min_{\pi_2\in\Pi_2} G_1(\pi_1,\pi_2) = \max_{0\le p\le 1} \min\{(x_2 - x_4)p + x_4, (x_1 - x_3)p + x_3\}. \quad (1)$$

Da $x_1, \dots, x_4$ Konstanten sind, sind die Funktionen $g_1(p) = (x_2 - x_4)p + x_4$ und $g_2(p) = (x_1 - x_3)p + x_3$ Geraden. Für diese lässt sich leicht bestimmen, welche der beiden Funktionen für welche Werte von p das Minimum darstellt. Kreuzen sich $g_1(p)$ und $g_2(p)$ im Intervall $0 \le p \le 1$, dann ist der MaxMin-Wert der Wert am Schnittpunkt der Geraden. Kreuzen sich $g_1(p)$ und $g_2(p)$ im Intervall $0 \le p \le 1$ nicht, dann ist eine Funktion in diesem Intervall immer kleiner als die andere. Dann gibt einer der Endpunkte dieser kleineren Geraden den MaxMin-Wert an.

Analog gilt für den MinMax-Wert für Spieler 1

$$\begin{aligned}\min_{\pi_2\in\Pi_2} \max_{\pi_1\in\Pi_1} G_1(\pi_1,\pi_2) &= \min_{0\le q\le 1} \max_{0\le p\le 1} (\underbrace{x_1pq + x_2p(1-q) + x_3(1-p)q + x_4(1-p)(1-q)}_{f(p,q)}) \\ &= \min_{0\le q\le 1} \max\{f(0,q), f(1,q)\} \\ &= \min_{0\le q\le 1} \max\{(x_3 - x_4)q + x_4, (x_1 - x_2)q + x_2\}. \quad (2)\end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie für das *Gefangenendilemma* (siehe Kapitel 1, Folie 14)

(i) die MaxMin-Strategie von Spieler 1,
(ii) den MaxMin-Wert für Spieler 1,
(iii) die MinMax-Strategie von Spieler 1 gegen Spieler 2,
(iv) die MinMax-Strategie von Spieler 2 gegen Spieler 1
(v) und den MinMax-Wert von Spieler 1.

Lösungsvorschlag:
Lösung über die Formeln (1) und (2) aus (a)—alternativ wäre auch Lösung über Nash-Equilibria in entsprechenden Nullsummenspielen möglich.

(i) und (ii): Gesucht ist zunächst eine MaxMin-Strategie für Spieler 1 $\pi_1 = (p, 1-p) \in$

Π_1 mit den Wahrscheinlichkeiten p, $0 \leq p \leq 1$, dass *Confession* gespielt wird, und $1-p$, dass *Silence* gespielt wird.
Nach (1) gilt für den MaxMin-Wert von Spieler 1

$$\begin{aligned}\max_{\pi_1 \in \Pi_1} \min_{\pi_2 \in \Pi_2} G_1(\pi_1, \pi_2) &= \max_{0 \leq p \leq 1} \min\{(x_2 - x_4)p + x_4, (x_1 - x_3)p + x_3\} \\ &= \max_{0 \leq p \leq 1} \min\{(0+2)p - 2, (-4+10)p - 10\} \\ &= \max_{0 \leq p \leq 1} \min\{2p - 2, 6p - 10\}.\end{aligned}$$

Das Minimum ist dabei immer $6p-10$, da $6p-10 \leq 2p-2 \iff p \leq 2$, was für alle p, $0 \leq p \leq 1$, erfüllt ist. Da $6p-10$ monoton steigt, ist das Maximum für den maximalen Wert von p erreicht. Also ist die MaxMin-Strategie von Spieler 1 die Strategie $(1,0)$ (Confession). Der zugehörige MaxMin-Wert von Spieler 1 ist $\max_{0 \leq p \leq 1}(6p-10) = 6 \cdot 1 - 10 = -4$.

(iv) und (v): Es bezeichne nun $(q, 1-q) = \pi_2 \in \Pi_2$ eine Strategie von Spieler 2. Der MinMax-Wert von Spieler 1 ist nach (2)

$$\begin{aligned}\min_{\pi_2 \in \Pi_2} \max_{\pi_1 \in \Pi_1} G_1(\pi_1, \pi_2) &= \min_{0 \leq q \leq 1} \max\{(x_3 - x_4)q + x_4, (x_1 - x_2)q + x_2\} \\ &= \min_{0 \leq q \leq 1} \max\{(-10+2)q - 2, (-4-0)q + 0\} \\ &= \min_{0 \leq q \leq 1} \max\{-8q - 2, -4q\}.\end{aligned}$$

Das Maximum wird hier (im Intervall $0 \leq q \leq 1$) immer von $-4q$ angenommen. $-4q$ ist monoton fallend, daher minimal für den maximalen Wert von q. Also ist die MinMax-Strategie von Spieler 2 gegen Spieler 1 die Strategie $(1,0)$ (Confession). Der zugehörige MinMax-Wert von Spieler 1 ist $\min_{0 \leq q \leq 1}(-4q) = -4$.

(iii): Die MinMax-Strategie von Spieler 1 gegen Spieler 2 betrachtet den Gewinn von Spieler 2. Aufgrund der Symmetrie des Spiels ist die MinMax-Strategie von Spieler 1 gegen Spieler 2 gleich der von Spieler 2 gegen Spieler 1, also auch $(1,0)$ (Confession).

Aufgabe 2: MaxMin- und MinMax-Werte

Aus der Vorlesung ist für Zwei-Spieler-Nullsummenspiele in Normalform bekannt, dass der MaxMin-Wert eines Spielers immer gleich seinem MinMax-Wert ist. Von Blatt 5, Aufgabe 3 wissen wir, dass man die Einschränkung *Nullsummenspiel* hier nicht benötigt und dass dies sogar für allgemeine Zwei-Spieler-Spiele in Normalform gilt.

(a) Zeigen Sie, dass es ein Spiel in Normalform mit drei Spielern gibt, für das der MaxMin-Wert eines Spielers nicht gleich seinem MinMax-Wert ist.

Lösungsvorschlag: Es sei folgendes Spiel in Normalform gegeben: $P = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{S} = S_1 \times S_2 \times S_3 = \{a, b\} \times \{a, b\} \times \{a, b\}$ und die Gewinnfunktionen g_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, wobei hier nur g_1 relevant ist, gegeben durch

$$g_1(a, a, a) = 1,\ g_1(a, a, b) = 4,\ g_1(a, b, a) = 2,\ g_1(a, b, b) = 3,$$
$$g_1(b, a, a) = 3,\ g_1(b, a, b) = 2,\ g_1(b, b, a) = 4,\ g_1(b, b, b) = 1.$$

Für Spieler i, $1 \leq i \leq 3$, sei Π_i die Menge der gemischten Strategien über S_i. Wir bezeichnen eine gemischte Strategie des Spielers 1, 2 bzw. 3 mit

$$\pi_1 = (p, 1-p) \in \Pi_1, \pi_2 = (q, 1-q) \in \Pi_2 \text{ bzw. } \pi_3 = (r, 1-r) \in \Pi_3.$$

Dann ist der MaxMin-Wert von Spieler 1 gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\max_{\pi_1 \in \Pi_1} \min_{(\pi_2,\pi_3) \in \Pi_2 \times \Pi_3} G_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \\
&= \max_{0 \leq p \leq 1} \min_{\substack{(q,r) \\ 0 \leq q \leq 1, 0 \leq r \leq 1}} \underbrace{\begin{pmatrix} pqr + 2p(1-q)r + 3(1-p)qr + 4(1-p)(1-q)r + 4pq(1-r) \\ + 3p(1-q)(1-r) + 2(1-p)q(1-r) + (1-p)(1-q)(1-r) \end{pmatrix}}_{f(p,q,r)}
\end{aligned}$$

Die Funktion f ist linear in q und r, daher (wie oben) minimal in den Werten 0 und 1 für q und r. Es gilt

$$\begin{aligned}
f(p, 0, 0) &= 2p + 1, \\
f(p, 0, 1) &= -2p + 4, \\
f(p, 1, 0) &= 2p + 2, \\
f(p, 1, 1) &= -2p + 3.
\end{aligned}$$

Das Minimum ist also $2p + 1$ für $0 \leq p \leq 1/2$ und $-2p + 3$ für $1/2 \leq p \leq 1$. Also ist der MaxMin-Wert für Spieler 1 für $p = 1/2$ erreicht und beträgt $2 \cdot 1/2 + 1 = -2 \cdot 1/2 + 3 = 2$.

Umgekehrt ist für die Berechnung des MinMax-Werts von Spieler 1 die Funktion ebenfalls linear in p, daher maximal für $p = 0$ oder $p = 1$. Es gelten

$$\begin{aligned}
f(0, q, r) &= -2qr + 3r + q + 1, \\
f(1, q, r) &= -2qr - r + q + 3.
\end{aligned}$$

Für alle q, $0 \leq q \leq 1$, ist das Maximum $-2qr - r + q + 3$ für $0 \leq r \leq 1/2$ und

$-2qr + 3r + q + 1$ für $1/2 \leq r \leq 1$, also ist der MinMax-Wert für Spieler 1

$$\min \left\{ \min_{\substack{(q,r) \\ 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq q \leq 1}} \underbrace{(-2qr - r + q + 3)}_{h_1(q,r)}, \min_{\substack{(q,r) \\ \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \\ 0 \leq q \leq 1}} \underbrace{(-2qr + 3r + q + 1)}_{h_2(q,r)} \right\}.$$

Die Funktion $h_1(q,r) = -2qr - r + q + 3$ ist wieder linear in q und r und somit minimal in einer der Ecken.

$$\begin{aligned} h_1(0,0) &= 3, \\ h_1(1,0) &= 4, \\ h_1(0, 1/2) &= 5/2, \\ h_1(1, 1/2) &= 5/2. \end{aligned}$$

Die Funktion $h_2(q,r) = -2qr + 3r + q + 1$ ist auch wieder linear in q und r und somit minimal in einer der Ecken.

$$\begin{aligned} h_2(0, 1/2) &= 5/2, \\ h_2(1, 1/2) &= 5/2, \\ h_2(0,1) &= 4, \\ h_2(1,1) &= 3. \end{aligned}$$

Das Minimum—und damit der MinMax-Wert—ist also $5/2$, und somit gilt

$$\max_{\pi_1 \in \Pi_1} \min_{(\pi_2,\pi_3) \in \Pi_2 \times \Pi_3} G_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 2 \neq 5/2 = \min_{(\pi_2,\pi_3) \in \Pi_2 \times \Pi_3} \max_{\pi_1 \in \Pi_1} G_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3).$$

(b) Zeigen Sie, dass es ein Zwei-Spieler-Spiel in Normalform gibt, für das der MaxMin-Wert für Spieler 1 ungleich dem MinMax-Wert für Spieler 2 ist.

Lösungsvorschlag: Betrachte folgendes Spiel:

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(1,2)$	$(1,2)$
	b	$(1,2)$	$(1,2)$

Hier ist für alle Strategien π_1 von Spieler 1 und für alle Strategien π_2 von Spieler 2 der erwartete Gewinn von Spieler 1 $G_1(\pi_1, \pi_2) = 1$, also auch der MaxMin-Wert von Spieler 1:

$$\max_{\pi_1 \in \Pi_1} \min_{\pi_2 \in \Pi_2} G_1(\pi_1, \pi_2) = 1.$$

Genauso ist für alle Strategien π_1 von Spieler 1 und für alle Strategien π_2 von Spieler 2 der erwartete Gewinn von Spieler 2 $G_2(\pi_1, \pi_2) = 2$, also auch der MinMax-Wert von Spieler 2:

$$\min_{\pi_1 \in \Pi_1} \max_{\pi_2 \in \Pi_2} G_2(\pi_1, \pi_2) = 2.$$

Es gilt also:

$$\max_{\pi_1 \in \Pi_1} \min_{\pi_2 \in \Pi_2} G_1(\pi_1, \pi_2) = 1 \neq 2 = \min_{\pi_1 \in \Pi_1} \max_{\pi_2 \in \Pi_2} G_2(\pi_1, \pi_2).$$

Aufgabe 3: Koalitionsstrukturen und Auszahlungsvektoren

Betrachten Sie das kooperative Spiel mit übertragbarem Nutzen, das die Spielermenge $P = \{1, 2, 3\}$ und die folgende charakteristische Funktion hat:

$$\begin{array}{llll} v(\emptyset) = 0 & v(\{1\}) = 0 & v(\{1,2\}) = 2 & v(\{1,2,3\}) = 3 \\ & v(\{2\}) = 1 & v(\{1,3\}) = 2 & \\ & v(\{3\}) = 2 & v(\{2,3\}) = 2 & \end{array}$$

Welche möglichen Ausgänge (*outcomes*) gibt es, wenn man nur ganzzahlige und effiziente Auszahlungsvektoren betrachtet? Welche dieser Ausgänge maximieren die soziale Wohlfahrt?

Lösungsvorschlag: Bei drei Spielern gibt es fünf mögliche Koalitionsstrukturen:

$$\underbrace{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}}_{\mathfrak{C}_1}, \underbrace{\{\{1,2\}, \{3\}\}}_{\mathfrak{C}_2}, \underbrace{\{\{1,3\}, \{2\}\}}_{\mathfrak{C}_3}, \underbrace{\{\{1\}, \{2,3\}\}}_{\mathfrak{C}_4}, \underbrace{\{\{1,2,3\}\}}_{\mathfrak{C}_5}.$$

Dazu sind folgende Ausgänge $(\mathfrak{C}, \vec{a})$ mit effizienten, ganzzahligen Auszahlungsvektoren $\vec{a} \in \mathbb{N}$ möglich:

- $(\mathfrak{C}_1, (0,1,2))$.
- $(\mathfrak{C}_2, (0,2,2)), (\mathfrak{C}_2, (1,1,2)), (\mathfrak{C}_2, (2,0,2))$.
- $(\mathfrak{C}_3, (0,1,2)), (\mathfrak{C}_3, (1,1,1)), (\mathfrak{C}_3, (2,1,0))$.
- $(\mathfrak{C}_4, (0,0,2)), (\mathfrak{C}_4, (0,1,1)), (\mathfrak{C}_4, (0,2,0))$.
- $(\mathfrak{C}_5, (0,0,3)), (\mathfrak{C}_5, (0,1,2)), (\mathfrak{C}_5, (0,2,1)), (\mathfrak{C}_5, (0,3,0)), (\mathfrak{C}_5, (1,0,2)),$
  $(\mathfrak{C}_5, (1,1,1)), (\mathfrak{C}_5, (1,2,0)), (\mathfrak{C}_5, (2,0,1)), (\mathfrak{C}_5, (2,1,0)), (\mathfrak{C}_5, (3,0,0))$.

Die soziale Wohlfahrt einer Koalitionsstruktur $\mathfrak{C}$ ist definiert als $v(\mathfrak{C}) = \sum_{C \in \mathfrak{C}} v(C)$. Hier gelten:

$$v(\mathfrak{C}_1) = 3, v(\mathfrak{C}_2) = 4, v(\mathfrak{C}_3) = 3, v(\mathfrak{C}_4) = 2, v(\mathfrak{C}_5) = 3.$$

Das Maximum ist also bei allen Ausgängen mit der Koalitionsstruktur $\mathfrak{C}_2$ erreicht.