Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

(Lösungsvorschläge)

Blatt 5

Besprechung: 16. bis 18.11.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Wizard-Varianten

Im Folgenden werden zwei vereinfachte Varianten des Kartenspiels Wizard[1] betrachtet. Hierbei bekommen zwei Spieler zunächst eine bestimmte Anzahl an Karten. Das Spiel verläuft in Runden—in jeder Runde legen die Spieler nacheinander je eine Karte ab. Derjenige Spieler, der die in einer Runde wertvollste Karte ablegt, bekommt den sogenannten *Stich* (bestehend aus allen abgelegten Karten dieser Runde). Derjenige Spieler, der einen Stich bekommt, beginnt die nächste Runde. Ziel des Spiels ist es, die Anzahl an Stichen, die man bekommt, korrekt vorherzusagen. Das Spiel endet, wenn alle Karten abgelegt wurden. Wir gehen davon aus, dass beide Spieler risikoneutral sind.

(a) In der ersten Variante gelten folgende Regeln:

- Es gibt drei Karten, auf denen die Werte 1, 2 und 3 stehen.
- Jeder Spieler erhält eine Karte (es wird also nur eine Runde gespielt).
- Jeder Spieler zeigt seine Karte dem Gegner, ohne sie selbst zu sehen.
- Spieler 1 sagt vorher, ob er den Stich bekommt oder nicht.
- Danach sagt Spieler 2 vorher, ob er den Stich bekommt oder nicht.
- Daraufhin legen beide Spieler ihre Karte auf den Tisch.
- Der Spieler, der die Karte mit der größeren Zahl gespielt hat, gewinnt den Stich.
- Wenn ein Spieler richtig vorhergesagt hat, ob er den Stich bekommt, erhält er den Gewinn 1, sonst erhält er den Gewinn 0.

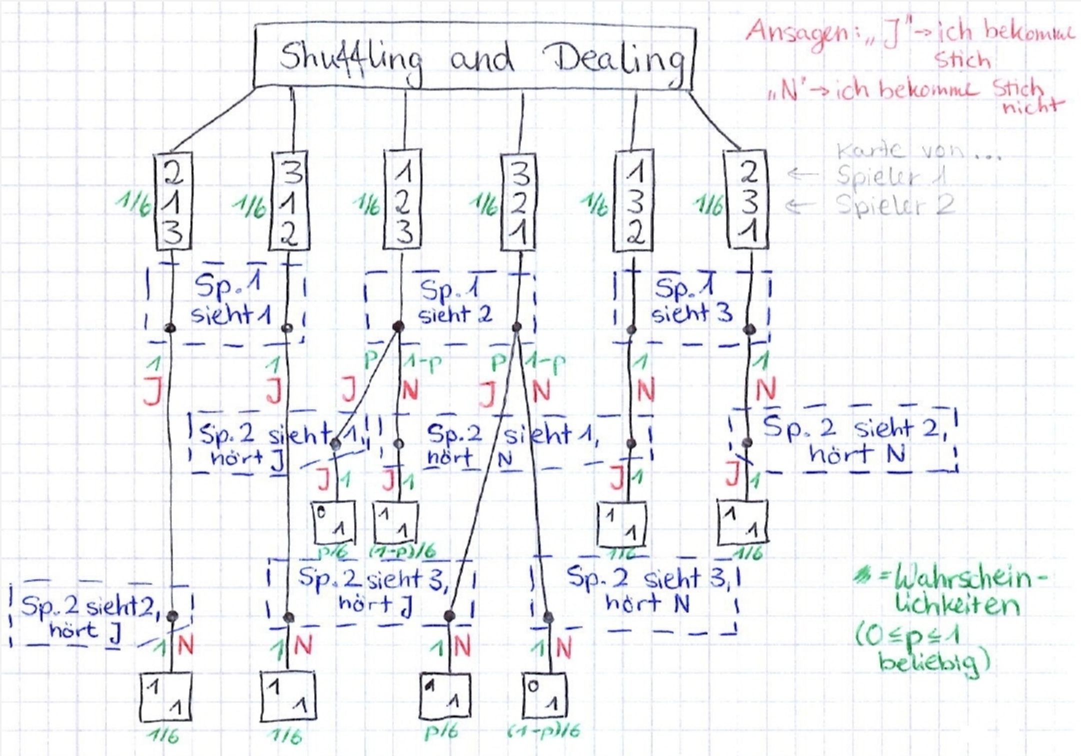
(i) Zeichnen Sie den Spielbaum für dieses Spiel (wie den für die Poker-Variante aus der Vorlesung) und geben Sie für jeden Teilbaum an, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieser eintritt bzw. von rationalen Spielern gespielt wird.
Teilbäume, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0 gespielt werden, dürfen hierbei weggelassen werden!

(ii) Gibt es einen Spieler, der einen Vorteil gegenüber dem anderen Spieler hat?
Gibt es einen Spieler, für den es sich lohnen würde zu bluffen?
Haben die Spieler in dieser Spielvariante perfekte Information?

(iii) Erläutern Sie knapp, was sich ändern würde, wenn beide Spieler gleichzeitig ihren Tipp abgeben würden; oder wenn beide mit offenen Karten spielen würden.

[1] K. Fisher, 1984; F. Vohwinkel, AMIGO Spiel + Freizeit GmbH, 1996

Lösungsvorschlag:



(i) Alle Teilbäume mit Wahrscheinlichkeit 0 wurden hier weggelassen.

(ii) Spieler 2 hat einen Vorteil, da er in jeder Situation eine Strategie hat, mit der er gewinnen kann. Spieler 1 hingegen hat nur eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $5/6$.

Es lohnt sich hier nicht zu bluffen, da kein Spieler dadurch seinen erwarteten Gewinn erhöhen kann.

Hier gibt es keine perfekte Information, da die Spieler nicht in jeder Situation wissen, wo sie sich im Spielbaum befinden (weil sie ihre eigene Karte nicht kennen).

(iii) Wenn beide Spieler gleichzeitig ihren Tipp abgeben, hat Spieler 2 keinen Vorteil mehr. Dann hat Spieler 2 genau die gleichen Spielsituationen wie Spieler 1.

Wenn die Spieler mit offenen Karten spielen, weiß jeder Spieler, ob er den Stich bekommt oder nicht und beide gewinnen daher auf jeden Fall—hier haben die Spieler perfekte Information.

(b) In der zweiten Variante gelten folgende Regeln:

- Es gibt vier Karten mit zwei unterschiedlichen Farben: eine rote 1, eine rote 2, eine blaue 1 und eine blaue 2.

- Wieder erhält jeder Spieler eine Karte und der Spielablauf ist der gleiche wie in Aufgabenteil (a). Allerdings spielt es jetzt eine Rolle, dass Spieler 1 zuerst seine Karte ablegt, da seine Karte die Farbe des Stichs bestimmt. Hat Spieler 2 die gleiche Farbe wie Spieler 1, bekommt der Spieler mit dem höheren Kartenwert den Stich, ansonsten bekommt Spieler 1 den Stich.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler 1? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler 2? Begründen Sie jeweils detailliert Ihre Antwort.

(ii) Gibt es hier einen Spieler, für den es sich lohnen würde zu bluffen? Haben die Spieler in dieser Spielvariante perfekte Information?

Lösungsvorschlag:

(i) Für Spieler 1 gibt es drei Möglichkeiten.

Fall 1: Spieler 1 sieht eine 1 bei Spieler 2. Dann weiß er, dass er gewinnt, denn er legt die Farbe des Stichs fest. Entweder hat er selbst eine andere Farbe oder die gleiche Farbe mit einem höheren Wert. In beiden Fällen bekommt Spieler 1 den Stich. Wenn Spieler 1 also vorhersagt, dass er den Stich bekommt, gewinnt er mit Wahrscheinlichkeit 1. Dieser Fall tritt bei 6 von 12 Kartenverteilungen auf.

Fall 2: Spieler 1 sieht eine rote 2 bei Spieler 2. Das heißt er selbst hat entweder eine rote 1, eine blaue 1 oder eine blaue 2. In $2/3$ dieser Fälle bekommt Spieler 1 den Stich, sonst Spieler 2. Um seinen Gewinn zu maximieren, wählt Spieler 1 immer die Strategie vorherzusagen, dass er den Stich bekommt. Dieser Fall tritt bei 3 von 12 Kartenverteilungen auf und Spieler 1 gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/3$.

Fall 3: Er sieht eine blaue 2. Analog zu Fall 2 gewinnt er in 2 von 3 Fällen.

Also sagt Spieler 1 immer voraus, dass er einen Stich bekommt und gewinnt damit mit einer Wahrscheinlichkeit von $10/12 = 5/6$.

Wenn Spieler 1 immer Strategie "vorhersagen, dass er den Stich bekommt" wählt und in $5/6$ der Fälle den Stich bekommt, bekommt Spieler 2 in $5/6$ der Fälle den Stich nicht.

Spieler 2 spielt also immer die Strategie "vorhersagen, dass er den Stich nicht bekommt". Die einzelnen Fälle sind dabei analog zu Spieler 1: Er sieht eine 2, er sieht eine rote 1 und er sieht eine blaue 1.

Beide Spieler gewinnen also mit einer Wahrscheinlichkeit von $5/6$.

(ii) Es lohnt sich für keinen Spieler zu bluffen, da er dadurch nur riskieren würde weniger zu gewinnen.

Hier gibt es keine perfekte Information, da die Spieler die jeweils eigene

Karte nicht kennen und dadurch die aktuelle Position im Spielbaum nicht genau kennen.

Aufgabe 2: Bayes'sche Spiele

Gegeben sei das folgende Kartenspiel für zwei Spieler:

- Es gibt vier Karten, je eine mit Zahlenwert 1, 2, 3 und 4.
- Zu Beginn zieht jeder Spieler eine Karte vom gemischten Stapel. Jeder Spieler sieht die eigene Karte, aber nicht die des Gegners.
- Nun muss Spieler 1 voraussagen, was die absolute Differenz der Zahlenwerte der beiden Spielerkarten ist. Für ein richtiges Voraussagen von "1" erhält er den Gewinn 2, für "2" den Gewinn 3, und für "3" den Gewinn 6. Bei einer falschen Voraussage ist der Gewinn 0.
- Spieler 2 hat nun die Gelegenheit, die Voraussage von Spieler 1 zu stehlen. Tut er dies, so erhält Spieler 1 stattdessen einen Gewinn von 1 (unabhängig von der Voraussage) und Spieler 2 erhält den Gewinn der Voraussage wie oben beschrieben. Stiehlt Spieler 2 nicht, sondern passt stattdessen, so sind die Rollen vertauscht—Spieler 2 erhält einen Wert von 1, und Spieler 1 behält seine Voraussage.
- Schließlich werden die Karten aufgedeckt und die Gewinne ausgezahlt.

(a) Nehmen Sie an, dass Spieler 1 die Karte 1 zieht und Spieler 2 die Karte 4. Geben Sie für diesen Fall ein Zwei-Personen-Spiel in Normalform an, mit der Spielermenge $P = \{1, 2\}$, den Strategien $S_1 = \{1, 2, 3\}$ und $S_2 = \{steal, pass\}$, und den oben beschriebenen Gewinnen.

Lösungsvorschlag: Die Karten haben die Differenz 3. Somit ergeben sich die folgenden Gewinne.

		Spieler 2	
		steal	*pass*
Spieler 1	1	$(1, 0)$	$(0, 1)$
	2	$(1, 0)$	$(0, 1)$
	3	$(1, 6)$	$(6, 1)$

(b) Bezeichne mit D_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ das Ereignis, dass die absolute Differenz der Zahlenwerte der gezogenen Karten i ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(D_1)$, $P(D_2)$ und $P(D_3)$.

Lösungsvorschlag: Für die Verteilung der Handkarten gibt es folgende Möglichkeiten, von der jede gleich wahrscheinlich ist:

Karte von Spieler 1:	2	3	4	1	3	4	1	2	4	1	2	3
Karte von Spieler 2:	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
absolute Differenz:	1	2	3	1	1	2	2	1	1	3	2	1

Die Werte 1, 2 und 3 kommen 6-mal, 4-mal, bzw. 2-mal vor. Das ergibt die Wahrscheinlichkeiten $P(D_1) = 1/2$ für Differenz 1, $P(D_2) = 1/3$ für Differenz 2, und $P(D_3) = 1/6$ für Differenz 3.

(c) Bezeichne mit H_k, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ das Ereignis, dass Spieler 2 die Karte mit Wert k gezogen hat. Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(D_i|H_k)$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und alle $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Lösungsvorschlag: In der Tabelle von (b) entsprechen die ersten drei Spalten dem Ereignis H_1, Spalten 4 bis 6 dem Ereignis H_2, Spalten 7 bis 9 dem Ereignis H_3, und Spalten 10 bis 12 dem Ereignis H_4. Wir können folgende Wahrscheinlichkeiten ablesen:

$$\begin{aligned}
&P(D_1|H_1) = P(D_2|H_1) = P(D_3|H_1) = 1/3\\
&P(D_1|H_2) = 2/3, (D_2|H_2) = 1/3, P(D_3|H_2) = 0\\
&P(D_1|H_3) = 2/3, (D_2|H_3) = 1/3, P(D_3|H_3) = 0\\
&P(D_1|H_4) = P(D_2|H_4) = P(D_3|H_4) = 1/3
\end{aligned}$$

(d) Angenommen, Spieler 2 hat die Karte 1 auf der Hand (Ereignis H_1). Berechnen Sie für alle reinen Strategien $s_1 \in \{1, 2, 3\}$ von Spieler 1 die beste Antwort in gemischten Strategien von Spieler 2. Was ist jeweils der erwartete Gewinn für Spieler 2? Begründen Sie, warum die Ergebnisse gleich sind, wenn man H_4 statt H_1 betrachtet.

Lösungsvorschlag: Bezeichne mit $\pi = (p, 1-p)$ eine gemischte Strategie von Spieler 2 mit $\pi(\mathit{steal}) = p$ und $\pi(\mathit{pass}) = 1-p$. Wir verwenden die zuvor berechneten Wahrscheinlichkeiten, um die besten Antworten zu bestimmen.

- Bei $s_1 = 1$ erhält der voraussagende Spieler einen Gewinn von 2 für eine korrekte Ansage und 0 für eine falsche Ansage; der andere Spieler erhält 1. Der erwartete Gewinn für $s_1 = 1$ ist also

$$\begin{aligned}
&p \cdot \Big(P(D_1|H_1) \cdot 2 + P(\overline{D_1}|H_1) \cdot 0\Big) + (1-p) \cdot 1\\
=&p \cdot (1/3 \cdot 2 + 2/3 \cdot 0) + (1-p)\\
=&1 - 1/3 p.
\end{aligned}$$

Dieser Term wird maximal für $p = 0$. Der erwartete Gewinn beträgt dann 1. Wenn Spieler 1 im Ereignis H_1 die Differenz 1 ansagt, sollte Spieler 2 also immer passen, um den eigenen Gewinn zu maximieren.

• Bei $s_1 = 2$ erhält der voraussagende Spieler einen Gewinn von 3 für eine korrekte Ansage und 0 für eine falsche Ansage; der andere Spieler erhält 1. Der erwartete Gewinn für $s_1 = 2$ ist also

$$\begin{aligned} & p \cdot \Big(P(D_2|H_1) \cdot 3 + P(\overline{D_2}|H_1) \cdot 0 \Big) + (1-p) \cdot 1 \\ =& p \cdot ({}^1\!/\!_3 \cdot 3 + {}^2\!/\!_3 \cdot 0) + (1-p) \\ =& 1. \end{aligned}$$

Hier ist der erwartete Gewinn 1, unabhängig von der Wahrscheinlichkeit p, mit der Spieler 2 stiehlt. Wenn Spieler 1 im Ereignis H_1 die Differenz 2 wettet, maximiert Spieler 2 also mit jeder beliebigen gemischten Strategie den eigenen Gewinn.

• Bei $s_1 = 3$ erhält der voraussagende Spieler einen Gewinn von 6 für eine korrekte Ansage und 0 für eine falsche Ansage; der andere Spieler erhält 1. Der erwartete Gewinn für $s_1 = 3$ ist also

$$\begin{aligned} & p \cdot \Big(P(D_3|H_1) \cdot 6 + P(\overline{D_3}|H_1) \cdot 0 \Big) + (1-p) \cdot 1 \\ =& p \cdot ({}^1\!/\!_3 \cdot 6 + {}^2\!/\!_3 \cdot 0) + (1-p) \\ =& 1 + p. \end{aligned}$$

Der erwartete Gewinn ist also maximal für $p = 1$ und beträgt dann 2. Wenn Spieler 1 im Ereignis H_1 die Differenz 3 wettet, sollte Spieler 2 also immer stehlen, um den eigenen Gewinn zu maximieren.

• Für die Ereignisse H_1 und H_4 sind nach (c) alle Wahrscheinlichkeiten identisch, mit denen die Ansage stimmt. Daher sind auch die besten Antworten identisch.

Aufgabe 3: Nullsummenspiele, Minimax-Theorem

(a) Wandeln Sie das folgende Zwei-Personen-Spiel mit Gewinnfunktionen g_1, g_2 nach der aus der Vorlesung bekannten Methode (siehe Kaptiel 5, Folie 19) aus der Sicht von beiden Spielern 1 und 2 jeweils in ein Nullsummenspiel mit Gewinnfunktionen g_1', g_2' bzw. g_1'', g_2'' um, wobei $g_1 \equiv g_1'$ bzw. $g_2 \equiv g_2''$.

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(1,2)$	$(-2,2)$
	b	$(-4,0)$	$(2,-3)$

Lösungsvorschlag: Wir wandeln zunächst aus der Sicht von Spieler 1 um. Für die neuen Gewinnfunktionen g_1' und g_2' gilt $g_1' \equiv g_1$ und $g_2' \equiv -g_1$.

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(\underline{1},-1)$	$(-2,\underline{2})$
	b	$(-4,\underline{4})$	$(\underline{2},-2)$

Aus der Sicht von Spieler 2 ergeben sich die Gewinnfunktionen g_1'' und g_2'' mit $g_1'' \equiv -g_2$ und $g_2'' \equiv g_2$.

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(-2,\underline{2})$	$(-2,\underline{2})$
	b	$(\underline{0},\underline{0})$	$(\underline{3},-3)$

(b) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien aller drei Spiele. Warum können die erzeugten Nullsummenspiele verwendet werden, um den MinMax-Wert oder den MaxMin-Wert der Spieler im ursprünglichen Spiel zu bestimmen, obwohl die gemischten Nash-Gleichgewichte der Spiele nicht übereinstimmen? Steht das nicht im Widerspruch zum Minimax-Theorem?

Lösungsvorschlag: Reine Nash-Gleichgewichte in den beiden Nullsummenspielen sind unter (a) eingezeichnet. ((b,a) ist eins im zweiten Nullsummenspiel.)

Im ursprünglichen Spiel ist (a,a) ein reines Nash-Gleichgewicht:

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(\underline{1},\underline{2})$	$(-2,\underline{2})$
	b	$(-4,\underline{0})$	$(\underline{2},-3)$

Zusätzlich bestimmen wir jetzt die weiteren gemischten Nash-Gleichgewichte. Haben beide Spieler a und b in ihrer *support*-Menge, dann muss für ein Nash-

Gleichgewicht $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$ gelten:

$$g_2(a,a)\pi_1(a) + g_2(b,a)\pi_1(b) = g_2(a,b)\pi_1(a) + g_2(b,b)\pi_1(b)$$
$$g_1(a,a)\pi_2(a) + g_1(a,b)\pi_2(b) = g_1(b,a)\pi_2(a) + g_1(b,b)\pi_2(b)$$

Bzw. mit $p := \pi_1(a)$ und $q := \pi_2(a)$:

$$g_2(a,a)p + g_2(b,a)(1-p) = g_2(a,b)p + g_2(b,b)(1-p)$$
$$g_1(a,a)q + g_1(a,b)(1-q) = g_1(b,a)q + g_1(b,b)(1-q)$$

- Für das ursprüngliche Spiel ergibt sich:

$$2p + 0(1-p) = 2p + (-3)(1-p)$$
$$1q + (-2)(1-q) = (-4)q + 2(1-q)$$

Umstellen der Gleichungen ergibt $p = 1$ und $q = 4/9$. Es gibt hier also die gemischten Nash-Gleichgewichte $((1,0),(1,0))$ und $((1,0),(4/9,5/9))$.

- Nullsummenspiel aus Sicht von Spieler 1:

$$(-1)p + 4(1-p) = 2p + (-2)(1-p)$$
$$1q + (-2)(1-q) = (-4)q + 2(1-q)$$

Umstellen ergibt $p = 2/3$ und $q = 4/9$ (die Formel für q ist wie im ursprünglichen Spiel, da die Gewinnfunktion von Spieler 1 hier gleich bleibt). Es gibt also nur ein gemischte Nash-Gleichgewicht $((2/3, 1/3),(4/9,5/9))$.

- Nullsummenspiel aus Sicht von Spieler 2:

$$(-2)q + (-2)(1-q) = 0q + 3(1-q)$$
$$\Leftrightarrow -2q - 2 + 2q = 3 - 3q \Leftrightarrow 3q = 5 \Leftrightarrow q = 5/3$$

$q = 5/3$ liefert keine gültige gemischte Strategie für Spieler 2. Da b für Spieler 1 in diesem Spiel eine strikt dominante Strategie ist, ist auch klar, dass Spieler 2 ihn nicht indifferent machen kann. Das reine Nash-Gleichgewicht (b,a)—also $((0,1),(1,0))$—ist hier das einzige gemischte Nash-Gleichgewicht.

Antwort: Da MinMax- und MaxMin-Wert eines Spielers nur von der Gewinnfunktion dieses Spielers abhängen, und da diese im ursprünglichen Spiel und im jeweils erzeugten Nullsummenspiel gleich sind, sind die MinMax- und MaxMin-Werte in beiden Spielen gleich. Das Resultat, dass die MinMax- und MaxMin-Werte der Gewinn in jedem gemischten NE sind, gilt jedoch nur für die Nullsummenspiele! Daher ist es auch kein Widerspruch zum Minimax-Theorem, dass die gemischten NEs nicht übereinstimmen.