Prof. Dr. J. Rothe Düsseldorf, 01.11.2022

Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

Blatt 4

Besprechung: 09. bis 11.11.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Eigenschaften der Polynomialzeit-many-one-Reduktion

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ zwei Sprachen über einem gegebenen Alphabet Σ. Zeigen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung.

(a) Aus $A \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}} B$ folgt $\bar{A} \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}} \bar{B}$.

Hinweis: $\bar{A} = \Sigma^* \setminus A$ ist das Komplement der Sprache A.

(b) Die Relation $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}$ ist transitiv.

(c) Ist A ein $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}$-schweres (engl.: $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}$-*hard*) Problem für eine Komplexitätsklasse $\mathscr{C}$ und gilt $A \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}} B$, dann ist B ebenfalls $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}$-schwer für $\mathscr{C}$.

Aufgabe 2: Geography

Vollziehen Sie den PSPACE-Härte-Beweis für Geography, der in der Vorlesung an einem Beispiel illustriert wurde, an einem weiteren Beispiel nach. Betrachten Sie dazu die folgende quantifizierte Boolesche Formel:

$$H = (\exists x_1)(\forall y_1)(\exists x_2)[(x_1 \vee \neg y_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \neg x_2)]$$

(a) Überlegen Sie zunächst, wie die Reduktion modifiziert werden muss, wenn der letzte Quantor der Formel existenziell ist.

(b) Geben Sie den gerichteten Graphen G an, der aus H konstruiert wird, und entscheiden Sie, ob H eine wahre quantifizierte Aussage ist und ob es in G eine Gewinnstrategie für Spieler 1 gibt.

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

Aufgabe 3: Geography II
Betrachten Sie das folgende Entscheidungsproblem.

Geography II	
Gegeben:	Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einem Startknoten $s \in V$.
Frage:	Gibt es eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler im Spiel *geography*, das auf G basiert und bei s beginnt?

Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}$-Reduktion, dass Geography II $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}$-schwer für PSPACE ist.

Hinweis: Bekannte Aussagen aus der Vorlesung können Sie natürlich verwenden.

Aufgabe 4: Teilspiel-perfekte Nash-Gleichgewichte
Betrachten Sie das folgende, von Blatt 1 bekannte Zwei-Personen Spiel:

		Spieler 2		
		1	2	3
Spieler 1	1	(2,5)	(4,3)	(3,3)
	2	(1,2)	(3,3)	(5,1)
	3	(1,4)	(4,2)	(5,1)

(a) Fassen Sie das Spiel als sequenzielles Spiel auf, bei dem zuerst Spieler 1 und danach Spieler 2 die eigene Strategie wählt. Insbesondere weiß hier also Spieler 2 vor der eigenen Entscheidung, was Spieler 1 gewählt hat. Zeichnen Sie den zugehörigen Spielbaum und ermitteln Sie mithilfe von Rückwärtsinduktion alle teilspiel-perfekten Nash-Gleichgewichte (engl.: *subgame-perfect equilibria*) für dieses Spiel.

(b) Wie lauten die teilspiel-perfekten Nash-Gleichgewichte für das sequenzielle Spiel, bei dem Spieler 2 beginnt?