Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

(Lösungsvorschläge)

Blatt 3

Besprechung: 02. bis 04.11.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

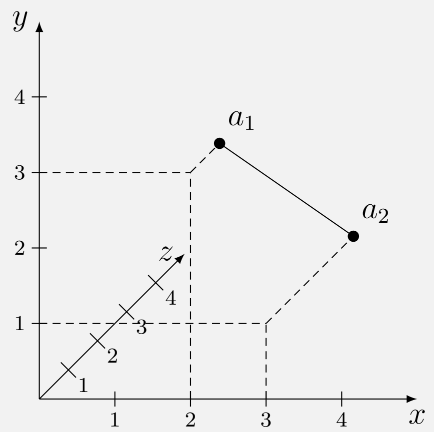
Aufgabe 1: Grafische Darstellung von Gewinnen

Betrachten Sie das folgende nichtkooperative Spiel zwischen Anna und Belle.

		Belle		
		b_1	b_2	b_3
	a_1	(2,1)	(3,2)	(1,3)
Anna	a_2	(3,1)	(1,4)	(3,0)

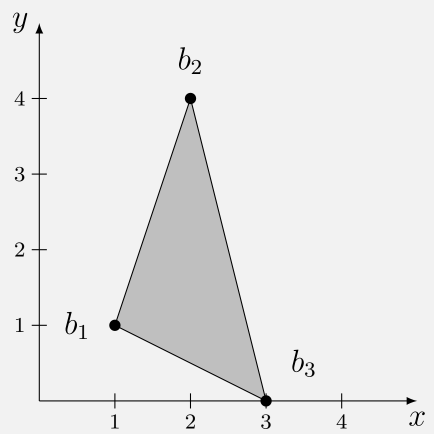
(a) Stellen Sie die konvexe Hülle von Annas Gewinnen grafisch in einem Koordinatensystem dar (wie in Kapitel 2, Folie 35).

Lösungsvorschlag: Annas reine Strategien liefern die zwei Punkte $a_1 = (2, 3, 1)$ und $a_2 = (3, 1, 3)$. In der Grafik geben die drei Achsen jeweils Annas Gewinn unter b_1 (x-Achse), unter b_2 (y-Achse) und unter b_3 (z-Achse) an.



(b) Stellen Sie die konvexe Hülle von Belles Gewinnen grafisch in einem Koordinatensystem dar (wie in Kapitel 2, Folie 35).

Lösungsvorschlag: Belles reine Strategien liefern die drei Punkte $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (2, 4)$ und $b_3 = (3, 0)$. In der Grafik geben die zwei Achsen jeweils Belles Gewinn unter a_1 (x-Achse) und unter a_2 (y-Achse) an.



(c) Begründen Sie, warum ein gemischtes Strategieprofil $\vec{\pi} = (\pi_A, \pi_B)$ mit $\pi_B(b_1) > 0$ im obigen Spiel kein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien sein kann.

Lösungsvorschlag: Kurz gesagt: $\vec{\pi}$ kann kein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien sein, weil es für Belle immer besser ist, alle Wahrscheinlichkeit von b_1 auf b_2 zu verschieben, denn unter b_2 bekommt Belle einen größeren Nutzen als unter b_1 (egal welche Strategie Anna wählt).

Formaler Beweis: Zunächst stellen wir fest, dass im obigen Spiel gilt: $P = \{A, B\}$, $S_A = \{a_1, a_2\}, S_B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathcal{S} = S_A \times S_B$ und die Gewinnfunktionen g_A und g_B sind durch die obige Tabelle gegeben.

Für einen Widerspruch nehmen wir an $\vec{\pi}$ sei ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien. Dann ist π_B eine beste Antwort von Belle auf $\vec{\pi}_{-B} = (\pi_A)$. Also gilt für alle möglichen gemischten Strategien $\pi'_B \in \Pi_B$ von Belle, dass $G_B(\pi_A, \pi_B) \geq G_B(\pi_A, \pi'_B)$. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
G_B(\pi_A, \pi_B) = \sum_{\vec{s}=(s_A,s_B)\in\mathcal{S}} & g_B(\vec{s}) \cdot \pi_A(s_A) \cdot \pi_B(s_B) \\
&= 1 \cdot \pi_A(a_1) \cdot \pi_B(b_1) + 2 \cdot \pi_A(a_1) \cdot \pi_B(b_2) + 3 \cdot \pi_A(a_1) \cdot \pi_B(b_3) \\
&+ 1 \cdot \pi_A(a_2) \cdot \pi_B(b_1) + 4 \cdot \pi_A(a_2) \cdot \pi_B(b_2) + 0 \cdot \pi_A(a_2) \cdot \pi_B(b_3) \\
&= \pi_A(a_1) \cdot (1 \cdot \pi_B(b_1) + 2 \cdot \pi_B(b_2) + 3 \cdot \pi_B(b_3)) \\
&+ \pi_A(a_2) \cdot (1 \cdot \pi_B(b_1) + 4 \cdot \pi_B(b_2) + 0 \cdot \pi_B(b_3)).
\end{aligned}$$

Betrachte nun $\pi'_B = (0, \pi_B(b_1) + \pi_B(b_2), \pi_B(b_3))$. Es gilt

$$\begin{aligned}
G_B(\pi_A, \pi'_B) &= \sum_{\vec{s}=(s_A,s_B)\in\mathcal{S}} g_B(\vec{s}) \cdot \pi_A(s_A) \cdot \pi'_B(s_B) \\
&= \pi_A(a_1) \cdot (1 \cdot \pi'_B(b_1) + 2 \cdot \pi'_B(b_2) + 3 \cdot \pi'_B(b_3)) \\
&+ \pi_A(a_2) \cdot (1 \cdot \pi'_B(b_1) + 4 \cdot \pi'_B(b_2) + 0 \cdot \pi'_B(b_3)) \\
&= \pi_A(a_1) \cdot (1 \cdot 0 + 2 \cdot (\pi_B(b_1) + \pi_B(b_2)) + 3 \cdot \pi_B(b_3)) \\
&+ \pi_A(a_2) \cdot (1 \cdot 0 + 4 \cdot (\pi_B(b_1) + \pi_B(b_2)) + 0 \cdot \pi_B(b_3)).
\end{aligned}$$

Folglich gilt $G_B(\pi_A, \pi'_B) > G_B(\pi_A, \pi_B)$, was einen Widerspruch darstellt.

(d) Bestimmen Sie im obigen Spiel alle Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien.

Lösungsvorschlag: Zunächst lässt sich feststellen, dass es hier kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien gibt.

Aus (c) wissen wir außerdem, dass Belle in einem Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien b_1 keine positive Wahrscheinlichkeit zuordnet. Ihre *support*-Menge besteht also nur aus b_2 und b_3, während Annas *support*-Menge aus a_1 und a_2 besteht.

Da für ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien alle Spieler indifferent zwischen den Strategien in ihren *support*-Mengen sein müssen, ergeben sich folgende Gleichungen. Für ein Nash-Gleichgewicht $\vec{\pi} = (\pi_A, \pi_B)$ mit $\pi_A = (p, 1-p)$ und $\pi_B = (0, q, 1-q)$ muss gelten:

$$\begin{aligned}
3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) &= 1 \cdot q + 3 \cdot (1 - q) \\
2 \cdot p + 4 \cdot (1 - p) &= 3 \cdot p.
\end{aligned}$$

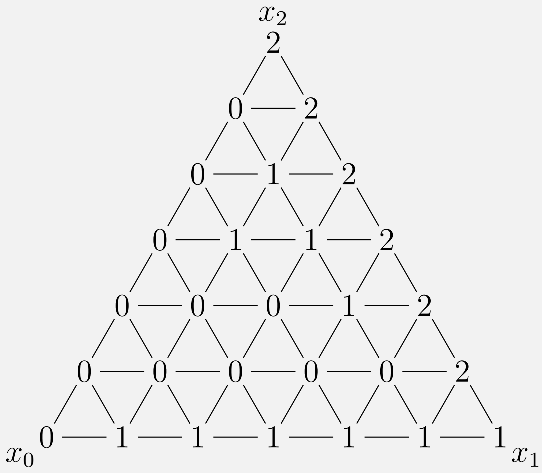
Das lässt sich umformen zu $q = 1/2$ und $p = 4/5$.

Also ist $\vec{\pi} = (\pi_A, \pi_B)$ mit $\pi_A = (4/5, 1/5)$ und $\pi_B = (0, 1/2, 1/2)$ ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Aufgabe 2: Walks auf markierten Simplizes

(a) Vervollständigen Sie in Abbildung 1a die Markierung der simplizialen Unterteilung eines 2-Simplex $T = \vec{x}_0\vec{x}_1\vec{x}_2$ zu einer echten Markierung (engl. *proper labeling*), so dass es genau drei vollständig markierte Teilsimplexe (engl. *completely labeled subsimplexes*) gibt.

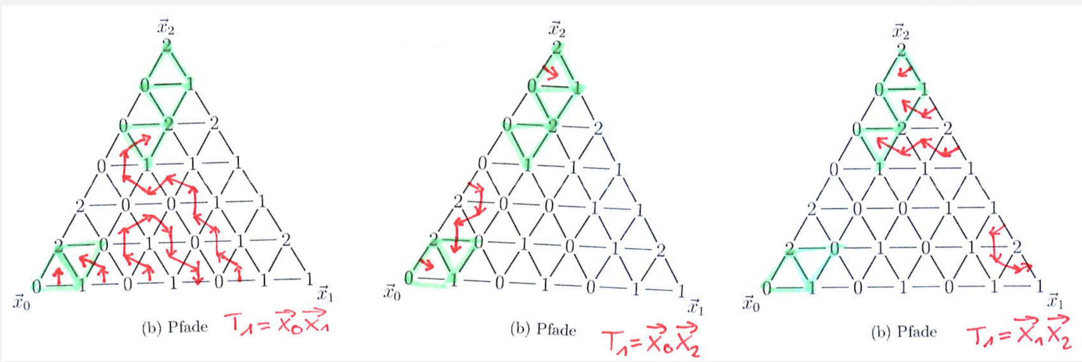
Lösungsvorschlag: Eine mögliche Lösung ist:



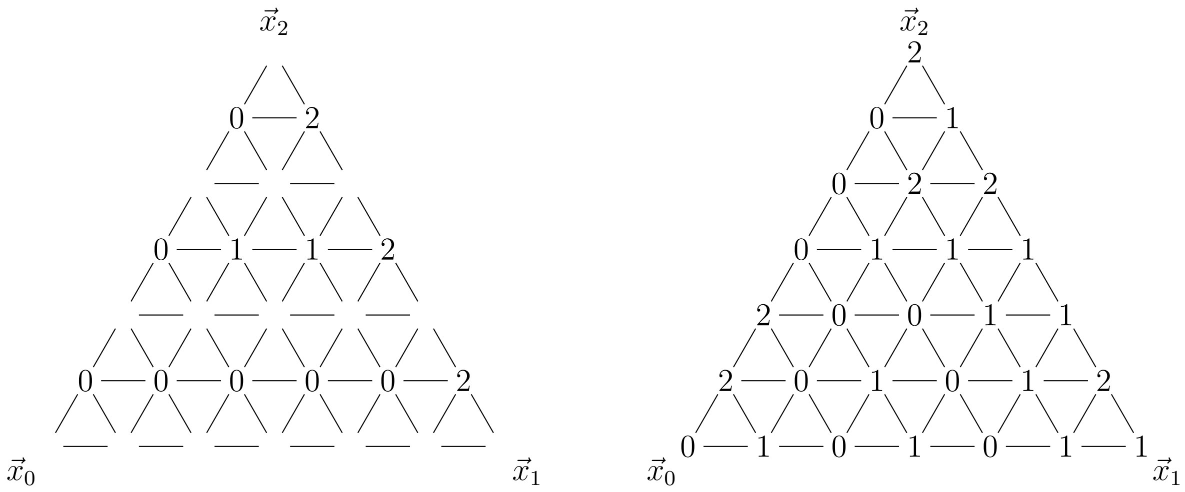
(b) Geben Sie für die simpliziale Unterteilung in Abbildung 1b eines 2-Simplex $T_2 = \vec{x}_0\vec{x}_1\vec{x}_2$ für jede Wahl einer 1-Fläche $T_1 \in \{\vec{x}_0\vec{x}_1, \vec{x}_0\vec{x}_2, \vec{x}_1\vec{x}_2\}$ von T_2 die Typ-1 Pfade an, die im Beweis von Sperners Lemma konstruiert werden. (Die Angabe der entsprechenden Bilder ist ausreichend.)

Warum macht es für den Beweis keinen Unterschied, dass die durch Typ-1 Pfade gefundenen vollständig markierten Teilsimplexe von T_2 sich für verschiedene Wahlen von T_1 unterscheiden?

Lösungsvorschlag:



Es macht für den Beweis keinen Unterschied, da die vollständig markierten Teilsimplexe, die über durch Typ-1 Pfade nicht gefunden werden, immer paarweise auftreten, und es in Sperners Lemma nur darum geht, dass die Gesamtanzahl der existierenden vollständig markierten Teilsimplexe ungerade ist—dafür genügt es also, dass die Anzahl der von Typ-1 Pfaden gefundenen Teilsimplexe ungerade ist.



(a) echte Markierung

(b) Pfade

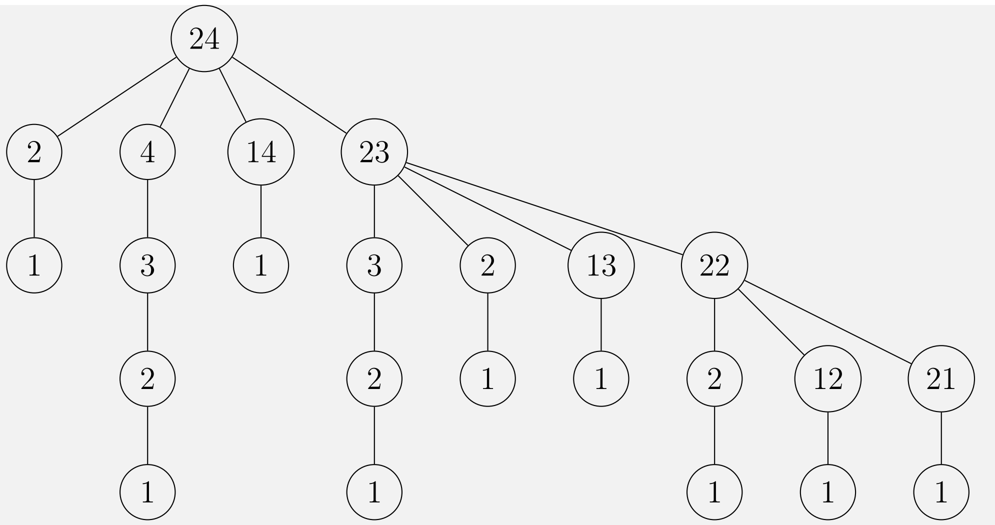
Abbildung 1: Simpliziale Unterteilungen

Aufgabe 3: Sequenzielles Spiel mit Zufallszahl

Betrachten Sie das folgende sequenzielle Zwei-Personen-Spiel. Zu Beginn des Spiels wird eine zufällige ganze Zahl zwischen 10 und 99 erzeugt. Spieler 1 beginnt das Spiel und die Spieler sind abwechselnd am Zug. Wer am Zug ist, darf entweder eine Ziffer streichen oder eine Ziffer um eins verringern. Dabei dürfen nur Ziffern um eins verringert werden, die größer als 1 sind, und es darf nur eine Ziffer gestrichen werden, falls noch zwei Ziffern vorhanden sind. Außerdem darf die erste Ziffer nur gestrichen werden, falls die zweite Ziffer keine Null ist. Gewinner ist der Spieler, der die Zahl 1 erzeugt.

(a) Geben Sie den vollständigen Spielbaum für die Zahl 24 an. (Wenn ein Spieler in einem Zug die Möglichkeit hat, eine 1 zu erzeugen, brauchen die anderen Möglichkeiten nicht mit angegeben zu werden.)

Lösungsvorschlag: (Hier muss noch dazu geschrieben werden, wer jeweils am Zug ist und wer gewinnt.)



(b) Für welche Zahlen gibt es eine Gewinnstrategie für Spieler 1, und für welche Zahlen gibt es eine Gewinnstrategie für Spieler 2? Wie sehen diese Strategien aus? Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösungsvorschlag: Spieler 2 hat eine Gewinnstrategie, wenn beide Ziffern gerade sind. Spieler 1 kann im ersten Schritt entweder eine Ziffer streichen, dann bleibt nur eine gerade Ziffer stehen. Oder Spieler 1 verringert eine der beiden Ziffern. Dann streicht Spieler 2 die ungerade Ziffer, so dass wenn Spieler 1 zum zweiten Mal am Zug ist immer nur eine ungerade Zahl dort steht. Da es dann keine Strategieauswahl mehr gibt, sondern die Zahl immer um 1 verringert wird, gewinnt immer der zweite Spieler.

In allen anderen Fällen gibt es eine Gewinnstrategie für den ersten Spieler. Entweder gibt es schon im ersten Zug die Möglichkeit eine 1 zu erzeugen (dies ist der Fall für alle Zahlen $x1$ und $1x$). Sonst streicht der erste Spieler eine Ziffer, so dass nur noch eine ungerade Ziffer stehenbleibt. Dann müssen die Spieler wieder abwechselnd die Zahl um 1 verringern und diesmal gewinnt dann Spieler 1.

Aufgabe 4: Sequenzielles Spiel: Nim-Variante

Betrachten Sie die folgende Variante des Nim-Spiels: Zu Beginn des Spiels gibt es drei Stapel mit je 6 Hölzchen. Ein Zug besteht darin, entweder ein oder zwei Hölzchen von genau einem der drei Stapel zu nehmen. Der Spieler, der das letzte Hölzchen nimmt, hat gewonnen. Spieler 1 beginnt das Spiel. Jede Spielsituation wird dabei durch ein Tupel (a, b, c) dargestellt, wobei $a, b, c \in \{0, \dots, 6\}$ mit $a \leq b \leq c$ die Anzahl der Hölzchen auf den drei Stapeln in aufsteigender Reihenfolge angibt.

Hinweis: Überlegen Sie sich, warum es nicht wichtig ist, auf welchem *Stapel die Hölzchen liegen, sondern nur deren jeweilige Anzahl.*

(a) Geben Sie alle Spielsituationen an, bei denen Spieler 1 an der Reihe ist und in denen er im übernächsten Zug (also seinem eigenen nächsten Zug) sicher gewinnen kann, und begründen Sie, warum das für diese (und nur diese) Situationen gilt.

Lösungsvorschlag:

Spieler 1 gewinnt im übernächsten Zug sicher, falls dann eine der folgenden Spielsituationen vorliegt: $(0,0,1)$ oder $(0,0,2)$ (denn in diesen beiden Situationen kann er die letzten Hölzchen nehmen). Er muss also Spieler 2 dazu zwingen, die Situation $(0,0,1)$ oder $(0,0,2)$ herzustellen.

Mögliche Vorgänger der Spielsituation $(0,0,1)$ sind $(0,1,1)$, $(0,1,2)$, $(0,0,2)$ und $(0,0,3)$. Mögliche Vorgänger der Spielsituation $(0,0,2)$ sind $(0,1,2)$, $(0,2,2)$, $(0,0,3)$ und $(0,0,4)$. Wir müssen aus diesen nun diejenigen Situation herausfiltern, in denen Spieler 2 nur die Situationen $(0,0,1)$ oder $(0,0,2)$ erzeugen kann.

- Von Situation $(0,1,1)$ aus kann Spieler 2 nur $(0,0,1)$ erreichen.
- Von $(0,0,3)$ aus kann Spieler 2 nur $(0,0,1)$ oder $(0,0,2)$ erreichen.
- Von allen anderen Situationen aus, nämlich $(0,1,2)$, $(0,0,2)$, $(0,2,2)$ und $(0,0,4)$, kann Spieler 2 auch andere Situationen außer $(0,0,1)$ und $(0,0,2)$ erzeugen. (Bei $(0,0,2)$ kann er sogar direkt gewinnen.)

Nur die Situationen $(0,1,1)$ und $(0,0,3)$ zwingen Spieler 2 also eine der gewünschten Folgesituationen zu erzeugen. Spieler 1 kann also in allen Vorgänger-Situationen von $(0,1,1)$ und $(0,0,3)$ im jeweils übernächsten Zug sicher gewinnen. Konkret sind die möglichen Vorgänger von $(0,1,1)$ die Situationen $(0,1,2)$, $(0,1,3)$, $(1,1,1)$ und $(1,1,2)$, und die möglichen Vorgänger von $(0,0,3)$ sind $(0,0,4)$, $(0,0,5)$, $(0,1,3)$ und $(0,2,3)$. Insgesamt also:

$$(0,1,2), (0,1,3), (1,1,1), (1,1,2), (0,0,4), (0,0,5) \text{ und } (0,2,3).$$

Alle diese Situationen können auch tatsächlich im Spielverlauf eintreten, da es möglich ist, immer genau ein Holz von einem beliebigen Stapel zu nehmen und so jede mögliche Situation zu erreichen.

(b) Gibt es für die Spielsituation $(1,2,4)$, bei der Spieler 1 am Zug ist, eine Gewinnstrategie für Spieler 1? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

Für die Situation $(1,2,4)$ gibt es eine Gewinnstrategie. Spieler 1 nimmt beide Hölzer vom Stapel mit 2 Hölzern, also die Spielsituation $(0,1,4)$. Dann kann Spieler 2 nur noch folgende Spielsituationen erreichen: $(0,0,4)$, $(0,1,3)$ und $(0,1,2)$. Aus Aufgabenteil (a) wissen wir, dass diese Situationen alle Spieler 1 zum Gewinn führen.

(c) Spielen Sie das Spiel gegen Ihren Tutor. Sie dürfen dabei entscheiden, wer beginnt. Gewinnen Sie das Spiel!

Hinweis: Überlegen Sie sich hierzu, ob es eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler gibt. Wenn ja, für welchen der beiden Spieler? Wie viele Züge sind dabei bis zum Sieg erforderlich?

Lösungsvorschlag: Es gibt eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler mit 6 Zügen pro Spieler. Der zweite Spieler wählt immer den gleichen Stapel wie der erste Spieler. Wenn der Stapel zum ersten Mal gewählt wurde, sind noch 4 oder 5 Hölzchen vorhanden, Spieler 2 nimmt dann so viele weg, dass noch 3 vorhanden sind. Wenn ein Stapel zum zweiten Mal gewählt wird sind entweder 1 oder 2 Hölzchen vorhanden, und der zweite Spieler kann den Stapel leer machen. Somit werden genau 6 Züge pro Spieler gespielt.

Weiterer Hinweis: Diese Aufgabe wird in zwei Teilen 'vorgerechnet'. Für das Vorrechnen von (a) und (b) gibt es einen Zulassungspunkt. Außerdem bekommt die erste Person, die mit (c) erfolgreich ist, einen Zulassungspunkt.