Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

(Lösungsvorschläge)

Blatt 2

Besprechung: 26. bis 28.10.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Strikte Nash-Gleichgewichte

(a) Zeigen Sie, dass es kein Zwei-Personen-Spiel mit je zwei Strategien pro Person gibt, welches ein striktes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien, aber keine dominante Strategie besitzt.

Lösungsvorschlag: Angenommen, es gibt ein Zwei-Personen-Spiel mit je zwei Strategien pro Person, welches ein striktes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien, aber keine dominante Strategie besitzt.

Betrachte ein solches Zwei-Personen-Spiel in Normalform. Seien $P = \{1, 2\}$, $S_1 = \{a, b\}$, $S_2 = \{c, d\}$, und die Gewinnfunktionen in Tabellenform gegeben:

		Spieler 2	
		c	d
Spieler 1	a	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)
	b	(x_3, y_3)	(x_4, y_4)

Sei o.B.d.A. (x_1, y_1) ein striktes Nash-Gleichgewicht (welches nach obiger Annahme existiert). Dann muss gelten:

$$x_1 \geq x_3 \text{ und} \tag{1}$$
$$y_1 \geq y_2. \tag{2}$$

Da es in diesem Spiel keine dominanten Strategien gibt (nach obiger Annahme), darf a keine dominante Strategie für Spieler 1 sein. Also gilt

$$x_1 < x_3 \text{ oder}$$
$$x_2 < x_4. \tag{3}$$

Wegen (1) muss $x_2 < x_4$ gelten.
Außerdem darf c keine dominante Strategie für Spieler 2 sein. Also gilt

$$\begin{aligned} &y_1 < y_2 \text{ oder} \\ &y_3 < y_4 \end{aligned} \tag{4}$$

Wegen (2) muss $y_3 < y_4$ gelten.

Da (x_1, y_1) ein striktes Nash-Gleichgewicht ist, darf zudem (x_4, y_4) kein Nash-Gleichgewicht sein. Also gilt

$$\begin{aligned} &x_4 < x_2 \text{ oder} \\ &y_4 < y_3. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu (3) bzw. (4). Somit war die Annahme falsch und es gibt kein Zwei-Personen-Spiel mit je zwei Strategien pro Person, welches ein striktes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien, aber keine dominante Strategie besitzt.

(b) Geben Sie ein Spiel in Normalform an, das keine dominante Strategie, aber ein striktes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien besitzt.

Lösungsvorschlag: Folgendes Spiel erfüllt die gewünschten Bedingungen:

		Spieler 2		
		a	b	c
Spieler 1	a	$(2, 2)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$
	b	$(1, 1)$	$(2, 2)$	$(1, 3)$

Ein striktes Nash-Gleichgewicht ist das Strategieprofil (a, a), und kein Spieler hat eine dominante Strategie.

Aufgabe 2: Farben mischen

Die Geschwister Anna und David möchten eine Wand ihres gemeinsamen Kinderzimmers neu streichen. Die Farbe dafür müssen sie noch anmischen. Für das Anmischen der Farbe (in der die gesamte Wand gestrichen wird) haben ihre Eltern die folgenden Regeln aufgestellt:

- David darf rote oder blaue Farbe beimischen, aber nicht beide Farben.
- Anna darf entweder gelbe Farbe oder nichts beimischen.

Außerdem äußern die Geschwister die folgenden Präferenzen bezüglich der Farben, die beim Mischen entstehen könnten:

- Anna: "*Ich finde Blau am besten. Grün finde ich schlechter als Blau, aber besser als Rot. Orange mag ich am wenigsten.*"
- David: "*Grün und Rot sind meine Lieblingsfarben. Daher wäre ich mit diesen Farben gleich zufrieden. Blau und Orange finde ich gleich gut, aber schlechter als meine Lieblingsfarben.*"

(a) Geben Sie das beschriebene Spiel in Normalform an. Wählen Sie dabei die Gewinnfunktionen so, dass sie den beschriebenen Präferenzen entsprechen. (Es handelt sich hier um ein Spiel mit reinen Strategien.)

> **Lösungsvorschlag:** Eine mögliche Lösung ist:
>
> | | | David | |
> |---|---|---|---|
> | | | rot | blau |
> | Anna | gelb | $(0, 2)$ | $(2, 3)$ |
> | | keine Farbe | $(1, 3)$ | $(3, 2)$ |

(b) Anna verkündet: "*Ich werde natürlich meine dominante Strategie wählen.*" Darauf antwortet David: "*Das habe ich mir gedacht. Dann wähle ich natürlich meine beste-Antwort-Strategie auf deine dominante Strategie.*" In welcher Farbe wird die Wand gestrichen? Ist das gewählte Strategieprofil Pareto-optimal?

> **Lösungsvorschlag:** Keine Farbe beizumischen ist eine dominante Strategie für Anna. (David hat keine dominante Strategie.)
>
> Davids beste-Antwort-Strategie auf "keine Farbe" von Anna ist "rot".
>
> Somit wird die Wand rot gestrichen.
>
> Das gewählte Strategieprofil (keine Farbe, rot) ist nicht Pareto-optimal, denn es wird Pareto-dominiert von (gelb, blau).

(c) Ist es möglich in Aufgabenteil (a) andere Werte für die Gewinnfunktionen zu wählen, so dass andere Pareto-Optima entstehen?

> **Lösungsvorschlag:** Nein. Die einzigen zwei Pareto-Optima sind immer (gelb, blau) und (keine Farbe, blau).
>
> (gelb, rot) und (keine Farbe, rot) werden immer von (gelb, blau) Pareto-dominiert, denn Anna findet Grün besser als Orange und Rot während David Grün besser als Orange und Grün genauso gut wie Rot findet. (gelb, blau) und (keine Farbe, blau) sind immer Pareto-optimal: (keine Farbe, blau) ist immer Pareto-optimal,

weil es keine andere Farbe gibt, die Anna mindestens so gut bewertet wie Blau. (gelb, blau) ist immer Pareto-optimal, da David immer Grün und Rot am Besten bewertet, während Anna Grün besser findet als Rot.

Aufgabe 3: Strategische Äquivalenz

Gegeben sind eine Menge $P = \{1, \ldots, n\}$ von Spielern und eine Menge $\mathcal{S} = S_1 \times \cdots \times S_n$ von Strategieprofilen. Sei A das Spiel mit den Spielern P, Strategieprofilen $\mathcal{S}$ und Gewinnfunktionen g_i, $1 \leq i \leq n$. Sei B das Spiel mit den Spielern P, Strategieprofilen $\mathcal{S}$ und Gewinnfunktionen h_i, $1 \leq i \leq n$. Dann sind A und B

- *strategisch äquivalent*, falls sie die gleichen Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien besitzen.
- *beste-Antwort-äquivalent*, falls die besten Antwortstrategien (engl. *best response strategies*) für alle Spieler übereinstimmen.

(a) Zeigen Sie, dass zwei Spiele A und B, die beste-Antwort-äquivalent sind, immer auch strategisch äquivalent sind.

Lösungsvorschlag: Nach Definition ist $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}$ ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien, falls s_i für alle i, $1 \leq i \leq n$, eine beste Antwortstrategie des Spielers i auf das Profil $\vec{s}_{-i}$ der Strategien der anderen Spieler ist.

Angenommen A und B sind beste-Antwort-äquivalent. Dann gilt für ein Nash-Gleichgewicht $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ in A, dass in Spiel B, für alle i, $1 \leq i \leq n$, s_i ebenfalls eine beste Antwortstrategie des Spielers i auf das Profil $\vec{s}_{-i}$ ist. Also ist $\vec{s}$ auch in B ein Nash-Gleichgewicht. Analog ist jedes Nash-Gleichgewicht in B auch ein Nash-Gleichgewicht in A.

(b) Geben Sie zwei Spiele an, die strategisch äquivalent sind, aber nicht beste-Antwort-äquivalent sind.

Lösungsvorschlag: Spiel A:

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(2,2)$	$(1,1)$
	b	$(1,1)$	$(0,0)$

Spiel B:

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(2, 2)$	$(0, 1)$
	b	$(1, 1)$	$(1, 0)$

In beiden Spielen ist (a, a) ein striktes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. Also sind A und B strategisch äquivalent. Allerdings sind A und B nicht beste-Antwort-äquivalent: Die beste Antwort von Spieler 1 auf die Strategie b von Spieler 2 ist

- in Spiel A die Strategie a und
- in Spiel B die Strategie b.

Aufgabe 4: Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien

(a) Bestimmen Sie zu dem folgenden Spiel alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien und in gemischten Strategien.

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(3, 3)$	$(3, 10)$
	b	$(7, 2)$	$(2, 1)$

Lösungsvorschlag: Es gilt $P = \{1, 2\}$ und $S_1 = S_2 = \{a, b\}$.

In reinen Strategien sind (a, b) und (b, a) Nash-Gleichgewichte.

Wir suchen nun ein Profil von gemischten Strategien $\overrightarrow{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$, welches ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien ist. Dabei ist $\pi_1 = (p, 1 - p)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über S_1 und $\pi_2 = (q, 1 - q)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über S_2.

Da beide Spieler indifferent zwischen allen Strategien in ihren *support*-Mengen sein müssen, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3q + 3(1 - q) &= 7q + 2(1 - q) \text{ und} \\ 3p + 2(1 - p) &= 10p + 1(1 - p). \end{aligned}$$

Das lässt sich umstellen zu:

$$q = {}^1\!/\!_5 \text{ und}$$
$$p = {}^1\!/\!_8.$$

Somit ist $\overrightarrow{\pi} = ((1/8, 7/8), (1/5, 4/5))$.

Also sind $((1/8, 7/8), (1/5, 4/5))$, $((1, 0), (0, 1))$ und $((0, 1), (1, 0))$ Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien.

(b) Passen Sie die Gewinne der Spieler 1 und 2 für die Fälle, in denen der andere Spieler die Strategie b spielt, so an, dass $(({}^3\!/\!_4, {}^1\!/\!_4), ({}^2\!/\!_3, {}^1\!/\!_3))$ ein Nash-Gleichgewicht ist.

Lösungsvorschlag:

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(3, 3)$	$(x_2, 10)$
	b	$(7, y_3)$	(x_4, y_4)

Wir suchen die Werte x_2, y_3, x_4 und y_4, so dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$3 \cdot {}^2\!/\!_3 + x_2 \cdot {}^1\!/\!_3 = 7 \cdot {}^2\!/\!_3 + x_4 \cdot {}^1\!/\!_3 \text{ und}$$
$$3 \cdot {}^3\!/\!_4 + y_3 \cdot {}^1\!/\!_4 = 10 \cdot {}^3\!/\!_4 + y_4 \cdot {}^1\!/\!_4.$$

Durch Umformung der Gleichungen ergibt sich:

$$x_2 = 8 + x_4 \text{ und}$$
$$y_3 = 21 + y_4.$$

Wähle zum Beispiel $x_2 = 9$, $x_4 = 1$, $y_3 = 22$ und $y_4 = 1$.