Prof. Dr. J. Rothe Düsseldorf, 18.10.2022

Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

Blatt 2

Besprechung: 26. bis 28.10.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Strikte Nash-Gleichgewichte

(a) Zeigen Sie, dass es kein Zwei-Personen-Spiel mit je zwei Strategien pro Person gibt, welches ein striktes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien, aber keine dominante Strategie besitzt.

(b) Geben Sie ein Spiel in Normalform an, das keine dominante Strategie, aber ein striktes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien besitzt.

Aufgabe 2: Farben mischen

Die Geschwister Anna und David möchten eine Wand ihres gemeinsamen Kinderzimmers neu streichen. Die Farbe dafür müssen sie noch anmischen. Für das Anmischen der Farbe (in der die gesamte Wand gestrichen wird) haben ihre Eltern die folgenden Regeln aufgestellt:

- David darf rote oder blaue Farbe beimischen, aber nicht beide Farben.
- Anna darf entweder gelbe Farbe oder nichts beimischen.

Außerdem äußern die Geschwister die folgenden Präferenzen bezüglich der Farben, die beim Mischen entstehen könnten:

- Anna: "*Ich finde Blau am besten. Grün finde ich schlechter als Blau, aber besser als Rot. Orange mag ich am wenigsten.*"
- David: "*Grün und Rot sind meine Lieblingsfarben. Daher wäre ich mit diesen Farben gleich zufrieden. Blau und Orange finde ich gleich gut, aber schlechter als meine Lieblingsfarben.*"

(a) Geben Sie das beschriebene Spiel in Normalform an. Wählen Sie dabei die Gewinnfunktionen so, dass sie den beschriebenen Präferenzen entsprechen. (Es handelt sich hier um ein Spiel mit reinen Strategien.)

(b) Anna verkündet: "*Ich werde natürlich meine dominante Strategie wählen.*" Darauf antwortet David: "*Das habe ich mir gedacht. Dann wähle ich natürlich meine beste-Antwort-Strategie auf deine dominante Strategie.*" In welcher Farbe wird die Wand gestrichen? Ist das gewählte Strategieprofil Pareto-optimal?

(c) Ist es möglich in Aufgabenteil (a) andere Werte für die Gewinnfunktionen zu wählen, so dass andere Pareto-Optima entstehen?

Aufgabe 3: Strategische Äquivalenz

Gegeben sind eine Menge $P = \{1, \dots, n\}$ von Spielern und eine Menge $\mathcal{S} = S_1 \times \dots \times S_n$ von Strategieprofilen. Sei A das Spiel mit den Spielern P, Strategieprofilen $\mathcal{S}$ und Gewinnfunktionen g_i, $1 \leq i \leq n$. Sei B das Spiel mit den Spielern P, Strategieprofilen $\mathcal{S}$ und Gewinnfunktionen h_i, $1 \leq i \leq n$. Dann sind A und B

- *strategisch äquivalent*, falls sie die gleichen Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien besitzen.
- *beste-Antwort-äquivalent*, falls die besten Antwortstrategien (engl. *best response strategies*) für alle Spieler übereinstimmen.

(a) Zeigen Sie, dass zwei Spiele A und B, die beste-Antwort-äquivalent sind, immer auch strategisch äquivalent sind.

(b) Geben Sie zwei Spiele an, die strategisch äquivalent sind, aber nicht beste-Antwort-äquivalent sind.

Aufgabe 4: Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien

(a) Bestimmen Sie zu dem folgenden Spiel alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien und in gemischten Strategien.

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$(3,3)$	$(3,10)$
	b	$(7,2)$	$(2,1)$

(b) Passen Sie die Gewinne der Spieler 1 und 2 für die Fälle, in denen der andere Spieler die Strategie b spielt, so an, dass $((3/4, 1/4), (2/3, 1/3))$ ein Nash-Gleichgewicht ist.