Übung zur Vorlesung

Algorithmische Spieltheorie

(Lösungsvorschläge)

Blatt 1

Besprechung: 19. bis 21.10.2022

Verantwortlich: Anna Kerkmann

Aufgabe 1: Zahlenspiel

Spieler 1 und 2 wählen jeweils eine ganze Zahl x_1 bzw. x_2 aus der Menge $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Als Gewinn erhält Spieler $i \in \{1, 2\}$ den Wert

$$(x_i - x_1 \cdot x_2) \mod 10.$$

(a) Stellen Sie dieses Zahlenspiel in Normalform dar und geben Sie dabei die Gewinnfunktionen analog zum Gefangenendilemma in Tabellenform an.

Lösungsvorschlag:

- Menge von Spielern $P = \{1, 2\}$
- Mengen von Strategien $S_1 = S_2 = \{0, 1, \ldots, 9\}$
- Für Spieler $i \in \{1, 2\}$ ist die Gewinnfunktion $g_i(s_1, s_2) = (s_i - s_1 \cdot s_2) \mod 10$ für $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$. In Tabellenform:

		Spieler 2									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Spieler 1	0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)	(0,7)	(0,8)	(0,9)
	1	(1,0)	(0,0)	(9,0)	(8,0)	(7,0)	(6,0)	(5,0)	(4,0)	(3,0)	(2,0)
	2	(2,0)	(0,9)	(8,8)	(6,7)	(4,6)	(2,5)	(0,4)	(8,3)	(6,2)	(4,1)
	3	(3,0)	(0,8)	(7,6)	(4,4)	(1,2)	(8,0)	(5,8)	(2,6)	(9,4)	(6,2)
	4	(4,0)	(0,7)	(6,4)	(2,1)	(8,8)	(4,5)	(0,2)	(6,9)	(2,6)	(8,3)
	5	(5,0)	(0,6)	(5,2)	(0,8)	(5,4)	(0,0)	(5,6)	(0,2)	(5,8)	(0,4)
	6	(6,0)	(0,5)	(4,0)	(8,5)	(2,0)	(6,5)	(0,0)	(4,5)	(8,0)	(2,5)
	7	(7,0)	(0,4)	(3,8)	(6,2)	(9,6)	(2,0)	(5,4)	(8,8)	(1,2)	(4,6)
	8	(8,0)	(0,3)	(2,6)	(4,9)	(6,2)	(8,5)	(0,8)	(2,1)	(4,4)	(6,7)
	9	(9,0)	(0,2)	(1,4)	(2,6)	(3,8)	(4,0)	(5,2)	(6,4)	(7,6)	(8,8)

(b) Gibt es in diesem Zahlenspiel eine dominante Strategie? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

Es gibt keine dominante Strategie.

Begründung: Bei einer dominanten Strategie für Spieler 1 müsste in der entsprechenden Zeile (die der Strategie entspricht) der Gewinn von Spieler 1 in jeder Spalte gleich dem Maximum der Spalte sein, und das ist hier nicht der Fall.

Etwas formaler: Für Spieler 1 kann keine Strategie außer der 9 eine dominante Strategie sein, denn für alle k, $0 \leq k \leq 8$, gilt $g_1(k, 0) < g_1(9, 0)$. Ebenso ist die 9 keine dominante Strategie für Spieler 1, denn $g_1(9, 2) = 1 < 9 = g_1(1, 2)$. Aus Symmetriegründen hat Spieler 2 dann auch keine dominante Strategie.

(c) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in diesem Zahlenspiel.

Lösungsvorschlag: Um die Nash-Gleichgewichte zu bestimmen wird zunächst in jeder Zeile jeder Eintrag mit dem maximalen Gewinn (innerhalb dieser Zeile) für Spieler 2 markiert, danach in jeder Spalte jeder Eintrag mit dem maximalen Gewinn (innerhalb dieser Spalte) für Spieler 1.

		Spieler 2									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Spieler 1	0	(0,0)	(**0**,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)	(0,7)	(0,8)	(0,**9**)
	1	(1,**0**)	(**0**,**0**)	(**9**,**0**)	(**8**,**0**)	(7,**0**)	(6,**0**)	(**5**,**0**)	(4,**0**)	(3,**0**)	(2,**0**)
	2	(2,0)	(**0**,**9**)	(8,8)	(6,7)	(4,6)	(2,5)	(0,4)	(**8**,3)	(6,2)	(4,1)
	3	(3,0)	(**0**,**8**)	(7,6)	(4,4)	(1,2)	(**8**,0)	(**5**,**8**)	(2,6)	(**9**,4)	(6,2)
	4	(4,0)	(**0**,7)	(6,4)	(2,1)	(8,8)	(4,5)	(0,2)	(6,**9**)	(2,6)	(**8**,3)
	5	(5,0)	(**0**,6)	(5,2)	(0,**8**)	(5,4)	(0,0)	(**5**,6)	(0,2)	(5,**8**)	(0,4)
	6	(6,0)	(**0**,**5**)	(4,0)	(**8**,**5**)	(2,0)	(6,**5**)	(0,0)	(4,**5**)	(8,0)	(2,**5**)
	7	(7,0)	(**0**,4)	(3,**8**)	(6,2)	(**9**,6)	(2,0)	(**5**,4)	(**8**,**8**)	(1,2)	(4,6)
	8	(8,0)	(**0**,3)	(2,6)	(4,**9**)	(6,2)	(**8**,5)	(0,8)	(2,1)	(4,4)	(6,7)
	9	(**9**,0)	(**0**,2)	(1,4)	(2,6)	(3,**8**)	(4,0)	(**5**,2)	(6,4)	(7,6)	(**8**,**8**)

Nash-Gleichgewichte sind dann alle Einträge die zweimal markiert wurden. In diesem Beispiel sind das: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 6)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 6)$, $(6, 1)$, $(6, 3)$, $(7, 7)$ und $(9, 9)$.

Aufgabe 2: Pareto-Dominanz

Gegeben sei das folgende nichtkooperative Spiel in Normalform, bestehend aus

- zwei Spielern $P = \{1, 2\}$,
- der Menge $\mathcal{S} = S_1 \times S_2$ an Strategieprofilen mit $S_1 = S_2 = \{1, 2, 3\}$ und
- folgenden Gewinnfunktionen g_1 und g_2 in Tabellenform:

		Spieler 2		
		1	2	3
Spieler 1	1	(2,5)	(4,3)	(3,3)
	2	(1,2)	(3,3)	(5,1)
	3	(1,4)	(4,2)	(5,1)

Lösungsvorschlag: Zunächst fassen wir zusammen, welches Strategieprofil welche anderen Strategieprofile (schwach oder stark) Pareto-dominiert und beantworten mithilfe dieser Liste die folgenden Aufgabenteile.

- (1,1) stark Pareto-dominiert (2,1) und (3,1)
- (1,2) stark Pareto-dominiert (2,1), Pareto-dominiert (1,3), (2,2) und (3,2)
- (1,3) stark Pareto-dominiert (2,1), schwach Pareto-dominiert (2,2)
- (2,1) Pareto-dominiert nichts
- (2,2) stark Pareto-dominiert (2,1), schwach Pareto-dominiert (1,3)
- (2,3) schwach Pareto-dominiert (3,3)
- (3,1) Pareto-dominiert (2,1)
- (3,2) Pareto-dominiert (2,1)
- (3,3) schwach Pareto-dominiert (2,3)

Es gilt immer: stark Pareto-dominiert $\Rightarrow$ Pareto-dominiert $\Rightarrow$ schwach Pareto-dominiert

(a) Geben Sie zwei Strategieprofile $\vec{s}$ und $\vec{t}$ aus $\mathcal{S}$ an, sodass $\vec{t}$ von $\vec{s}$ stark Pareto-dominiert wird.

Lösungsvorschlag: Wenn $\vec{t}$ von $\vec{s}$ stark Pareto-dominiert wird, muss gelten: $g_i(\vec{s}) > g_i(\vec{t})$ für alle i, $1 \leq i \leq 2$.

Dies ist der Fall für die folgenden Strategiepaare $(\vec{s}, \vec{t})$: $((1,1),(2,1))$, $((1,1),(3,1))$, $((1,2),(2,1))$, $((1,3),(2,1))$, $((2,2),(2,1)$.

(b) Geben Sie zwei Strategieprofile $\vec{s}$ und $\vec{t}$ aus $\mathcal{S}$ an, sodass $\vec{t}$ von $\vec{s}$ Pareto-dominiert, aber nicht stark Pareto-dominiert wird.

Lösungsvorschlag: Wenn $\vec{t}$ von $\vec{s}$ Pareto-dominiert wird, aber nicht stark Pareto-dominiert wird, muss gelten: $g_i(\vec{s}) \geq g_i(\vec{t})$ für alle i, $1 \leq i \leq 2$, und für mindestens ein j, $1 \leq j \leq 2$, gilt $g_j(\vec{s}) = g_j(\vec{t})$.

Die folgenden Strategiepaare $(\vec{s}, \vec{t})$ erfüllen diese Bedingung: $((1,2),(1,3))$, $((1,2),(2,2))$, $((1,2),(3,2))$, $((3,1),(2,1))$, $((3,2),(2,1)$.

(c) Geben Sie zwei Strategieprofile $\vec{s}$ und $\vec{t}$ aus $\mathcal{S}$ an, sodass $\vec{t}$ von $\vec{s}$ schwach Pareto-dominiert, aber nicht Pareto-dominiert wird.

Lösungsvorschlag: Wenn $\vec{t}$ von $\vec{s}$ schwach Pareto-dominiert wird, aber nicht Pareto-dominiert wird, muss für alle i, $1 \leq i \leq 2$ gelten: $g_i(\vec{s}) = g_i(\vec{t})$.

Die folgenden Strategiepaare $(\vec{s}, \vec{t})$ erfüllen diese Bedingung: $((2,2),(1,3))$, $((1,3),(2,2))$, $((2,3),(3,3))$, $((3,3),(2,3))$.

(d) Geben Sie alle Pareto-Optima und schwachen Pareto-Optima im gegebenen Spiel an.

Lösungsvorschlag:

- Pareto-Optima (dürfen nicht Pareto-dominiert werden):
  $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$.
- Schwache Pareto-Optima (dürfen nicht stark Pareto-dominiert werden):
  $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,2)$.

Aufgabe 3: Zehn Nash-Gleichgewichte

Entwerfen Sie ein Spiel mit zwei Spielern, welches insgesamt 10 Nash-Gleichgewichte hat und die folgenden Bedingungen erfüllt. Ein *bestes Nash-Gleichgewicht* ist hierbei ein Nash-Gleichgewicht, bei dem die Summe der Gewinne aller Spieler maximal ist (im Vergleich zu den anderen Nash-Gleichgewichten). Für die Nash-Gleichgewichte soll gelten:

- vier sind weder beste Nash-Gleichgewichte noch Profile dominanter Strategien,
- drei sind beste Nash-Gleichgewichte, die keine Profile dominanter Strategien sind,
- zwei sind Profile dominanter Strategien, die keine besten Nash-Gleichgewichte sind,
- eins ist ein Profil dominanter Strategien, das auch ein bestes Nash-Gleichgewicht ist.

Geben Sie Ihr Spiel in Normalform—mit Gewinnfunktion in Tabellenform—an, und geben Sie alle Nash-Gleichgewichte, besten Nash-Gleichgewichte, dominanten Strategien, und Profile dominanter Strategien ausdrücklich an.

Hinweis: Es gibt ein Zwei-Personen-Spiel mit vier Strategien pro Person, das diese Bedingungen erfüllt.

Lösungsvorschlag: Um ein solches Spiel zu konstruieren überlegt man sich folgendes:

- Damit ein Strategieprofil, welches in der Tabelle die Gewinne (x, y) hat, ein Nash-Gleichgewicht ist, muss y der Maximalgewinn des zweiten Spielers in jeder Zeile und x der Maximalgewinn des ersten Spielers in jeder Spalte sein.
- Damit eine Strategie für Spieler 1 dominant ist, muss für die entsprechende Zeile

für jeden Eintrag (x, y) x der Maximalgewinn des ersten Spielers in jeder Spalte sein. Damit eine Strategie für Spieler 2 dominant ist, muss für die entsprechende Spalte für jeden Eintrag (x, y) y der Maximalgewinn des zweiten Spielers in jeder Zeile sein.

- Da Profile dominanter Strategien immer Nash-Gleichgewichte sind, kann nicht jeder Spieler zwei dominante Strategien haben, denn dann gäbe es vier Nash-Gleichgewichte, die Profile dominanter Strategien sind. Gefordert sind aber nur drei.

Eine mögliche Lösung ist das folgende Zwei-Personen Spiel mit Spielern $P = \{1, 2\}$, Strategien $S_1 = S_2 = \{A, B, C, D\}$ und folgenden Gewinnfunktionen g_1 und g_2 in Tabellenform:

		Spieler 2			
		A	B	C	D
Spieler 1	A	(4,4)	(5,2)	(3,4)	(7,2)
	B	(4,3)	(5,3)	(3,2)	(7,2)
	C	(4,1)	(5,1)	(3,1)	(7,1)
	D	(4,4)	(4,4)	(3,4)	(5,2)

Es gilt:

- A ist eine dominante Strategie für Spieler 1 und Spieler 2, B und C sind zusätzlich dominante Strategien für Spieler 1. Somit sind die Profile dominanter Strategien (A, A), (B, A), und (C, A).
- Die zehn Nash-Gleichgewichte sind: (A, A), (A, C), (B, A), (B, B), (C, A), (C, B), (C, C), (C, D), (D, A), (D, C).
- Die besten Nash-Gleichgewichte sind: (A, A), (B, B), (C, D), (D, A).

Somit sind die obigen Bedingungen wie folgt erfüllt:

- (A, C), (C, B), (C, C) und (D, C) sind keine besten Nash-Gleichgewichte und keine dominanten Strategien.
- (B, B), (C, D) und (D, A) sind beste Nash-Gleichgewichte und keine dominanten Strategien.
- (B, A) und (C, A) sind keine besten Nash-Gleichgewichte aber dominante Strategien.
- (A, A) ist bestes Nash-Gleichgewicht und dominante Strategie.