Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: 02, Raum: 26
Tel.: +49 211 8112188, Fax: +49 211 8111667
E-Mail: rothe@cs.uni-duesseldorf.de
10. Juni 2016

Vorlesung im Sommersemester 2016

Cake-cutting Algorithms

Probeklausur, 23. Juni 2016

BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!
TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN UND VORNAMEN
UND IHRE MATRIKELNUMMER EIN!
FÜLLEN SIE DAS DECKBLATT AUS! (ABER BITTE KEINE PUNKTE EINTRAGEN!)

Name, Vorname:

Studienfach, Semester:

Matrikelnummer:

Anzahl der abgegebenen Blätter, inklusive Aufgabenblätter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
erreichbare Punktzahl	20	20	20	16	14	10	100
erreichte Punktzahl							

<u>Erlaubte Hilfsmittel</u>:

- Vorlesungsmitschriften, Bücher, Übungsblätter,
- selbst gebackener Kuchen,
- Gedächtnis.

<u>Nicht erlaubte Hilfsmittel</u>:

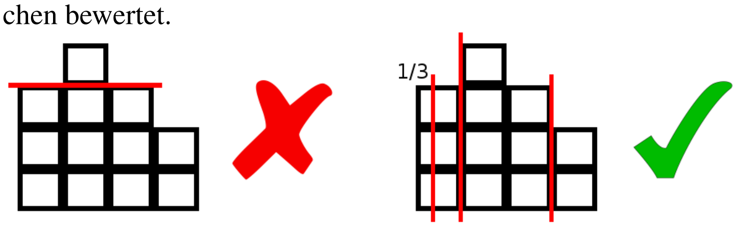
- Elektronische Geräte aller Art,
- Kommiliton/inn/en,
- beim Bäcker gekaufter Kuchen.

Allgemeine Hinweise

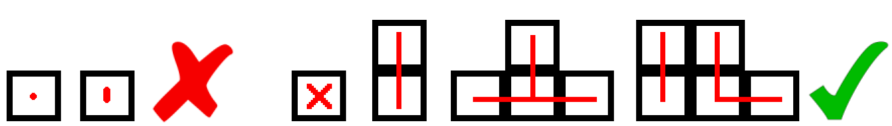
- Überprüfen Sie, ob Ihre Klausur 15 Blätter umfasst!
- Schreiben Sie unbedingt *am Ende* der Klausur die *genaue Anzahl aller abgegebenen Blätter* auf das Titelblatt! (Inklusive der Aufgabenblätter)
- Sollten Sie sich auf den Vorlagen verschreiben, können Sie neue Vorlagen erhalten. Bitte streichen Sie deutlich die ungewollte Lösung durch.
- Schreiben Sie leserlich! Unlesbares kann keine Punkte geben!
- Lesen Sie die Aufgaben, *bevor* Sie die Bearbeitung anfangen, einmal komplett durch!
- Benutzen Sie die gegebenen Vorlagen! Abweichen kann zu Punktabzug führen.
- Beschriften Sie Markierungen innerhalb von Spalten *deutlich*!
- Tabellen, die die Bewertungen der Portionen durch die Spieler/innen darstellen, müssen *eindeutig* beschriftet sein.
- „Spieler“ bezieht sich im Folgenden stets auf Spieler und Spielerinnen.

Allgemeine Hinweise zur Lösung von Aufgaben mit Boxen-Vorlagen

- Das „Abzählen“ der Boxen beginnt stets auf der linken Seite, d.h. bei Spalte 1.
- Pro Aufgabenstellung haben alle Spieler zu Beginn dieselbe Anzahl an Boxen. Das Abzählen der Boxen eines Spielers genügt also.
- Markierungen zur Abtrennung von Stücken werden ausschließlich in Form von senkrechten Strichen bewertet.



- Markierungen zur Portionszuweisung können, wie in den Übungen, durch Abkürzungen der Spielernamen oder durch Schraffieren der jeweiligen Boxen vorgenommen werden. Darüber hinaus sind auch Markierungen in Form von Kreuzen oder mindestens-zwei-Boxen-verbindende Linien zulässig. Markierungen in Form eines einzelnen Punktes werden nicht berücksichtigt.



Aufgabe 1 (20 Punkte) Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen in jeder Zeile entweder „Ja“ oder „Nein“ an.

Bewertung: Bezeichnet $\#R$ die Anzahl der richtig angekreuzten Antworten und $\#K$ die Anzahl der insgesamt angekreuzten Antworten (d. h. nur solche, bei denen *entweder „Ja“ oder „Nein“* angekreuzt wurde – Antworten, bei denen weder „Ja“ noch „Nein“ oder sowohl „Ja“ als auch „Nein“ angekreuzt wurde, zählen nicht zu $\#K$), so ergibt sich die folgende Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe:

$$\#R + \left\lfloor \frac{5 \cdot \#R}{\#K} \right\rfloor \text{ Punkte, falls } \#K > 0, \text{ und } 0 \text{ Punkte, falls } \#K = 0.$$

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Jede Kuchenaufteilung unter zwei Spielern ist neidfrei.
☐ Ja ☐ Nein Jede neidfreie Kuchenaufteilung ist proportional.
☐ Ja ☐ Nein Jede proportionale Kuchenaufteilung, die nicht super-proportional ist, ist exakt.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Es gibt ein endlich beschränktes Cake-cutting-Protokoll für drei Spieler, das neidfrei ist.
☐ Ja ☐ Nein Es gibt ein exaktes Moving-Knife-Protokoll für zwei Spieler.
☐ Ja ☐ Nein Es ist kein neidfreies Moving-Knife-Protokoll für vier Spieler bekannt.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

☐ Ja ☐ Nein Ist v_i eine Bewertungsfunktion, so gilt für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ des Kuchens X (auch wenn sie nicht disjunkt sind): $v_i(\overline{A} \cap (B \cup \overline{B})) = 1 - v_i(A)$.
☐ Ja ☐ Nein Das Dirty-work-Divide-and-Conquer-Protokoll benötigt im schlimmsten Fall $\mathcal{O}(n \log n)$ Schnitte (inklusive Markierungen) bei n Spielern.
☐ Ja ☐ Nein Beim Lone-Divider-Protokoll für drei Spieler erhält der Spieler, der schneidet, stets genau ein Drittel des Kuchens, sofern er sich an die Protokollstrategie hält.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

☐ Ja ☐ Nein Die maximal mögliche Anzahl von Schnitten pro Runde nimmt im Last-Diminisher-Protokoll von Runde zu Runde ab.
☐ Ja ☐ Nein Die maximal mögliche Anzahl von Schnitten pro Runde nimmt im Lone-Chooser-Protokoll von Runde zu Runde ab.
☐ Ja ☐ Nein Das Divide-and-Conquer-Protokoll benötigt für 21 Spieler im schlimmsten Fall 40 Schnitte (inklusive Markierungen).

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

☐ Ja ☐ Nein Weicht ein Spieler in einem proportionalen Protokoll, das immun gegen Manipulation für risikoscheue Spieler ist, von der Protokollstrategie ab, kann er niemals einen super-proportionalen Anteil erhalten.
☐ Ja ☐ Nein Mit zwei Schnitten kann kein endliches Protokoll für drei Spieler jedem der Spieler einen proportionalen Anteil garantieren.
☐ Ja ☐ Nein Mit vier Schnitten kann kein endliches Protokoll für vier Spieler jedem der Spieler einen proportionalen Anteil garantieren.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

David, Edgar, Felix und Anna (in dieser Reihenfolge) wollen sich einen Kuchen teilen. Um dies zu tun, möchten sie das folgende Protokoll ausprobieren, das Anna und David sich ausgedacht haben.

Protokoll von Anna und David

Gegeben: Kuchen $X = [0, 1]$, Spieler p_1, p_2, p_3, p_4, wobei v_i, $1 \leq i \leq 4$, die Bewertungsfunktion von p_i normiert auf X sei.

Schritt 1: Jeder der Spieler p_i, $1 \leq i \leq 4$, macht eine Markierung an der Stelle $m_i \in X$, so dass für das Stück Y_i links der Markierung gilt: $v_i(Y_i) = 1/4$.

Schritt 2: Bestimme den Spieler p_j, dessen Markierung am weitesten links liegt.

(Erfüllen mehrere Spieler das Kriterium für p_j, so wird derjenige Spieler p_i genommen, der unter diesen Spielern den kleinsten Index i hat.)

Schritt 3: Spieler p_j erhält die Portion Y_j und scheidet aus.

Schritt 4: Es sei $X' = X - Y_j$. Benenne die verbliebenen Spieler um in p'_1, p'_2 und p'_3, wobei v'_i, $1 \leq i \leq 3$, die Bewertungsfunktion von p'_i normiert auf X' sei. Die Spielerreihenfolge wird bei der Umbenennung beibehalten.

Schritt 5: Wende das Selfridge-Conway-Protokoll für die Spieler p'_1, p'_2, p'_3 (in dieser Reihenfolge) mit den Bewertungsfunktionen v'_i auf den Kuchen X' an.

(a) Wenden Sie das Protokoll an, um den Kuchen zwischen den Freunden aufzuteilen. Benutzen Sie dafür die gegebenen Vorlagen wie folgt beschrieben.

Tragen Sie in Schritt 1 auf Seite 5 die Markierungen aller Spieler ein und kennzeichnen Sie, welcher Spieler mit welcher Portion ausscheidet.

Bei der Anwendung des Selfridge-Conway-Protokolls geben Sie bitte zunächst die Spielerreihenfolge an und tragen dann die Schnitte in der entsprechenden Vorlage auf Seite 6 ein. Streichen Sie davor die Bewertungsfunktion des bereits ausgeschiedenen Spielers aus der Vorlage heraus und kennzeichnen Sie, welcher Teil des Kuchens bereits vergeben ist.

Begründen Sie bei der Anwendung des Protokolls, weshalb welcher Spieler welche Portion wählt.

Tragen Sie die resultierende Gesamtaufteilung (inklusive des Anteils des in Schritt 3 ausgeschiedenen Spielers) in die Vorlage auf Seite 7 ein und geben Sie die Bewertungen aller Portionen aus der Sicht aller Spieler und alle Neidrelationen an.

(b) Ist das oben angegebene Protokoll proportional? Begründen Sie Ihre Antwort.

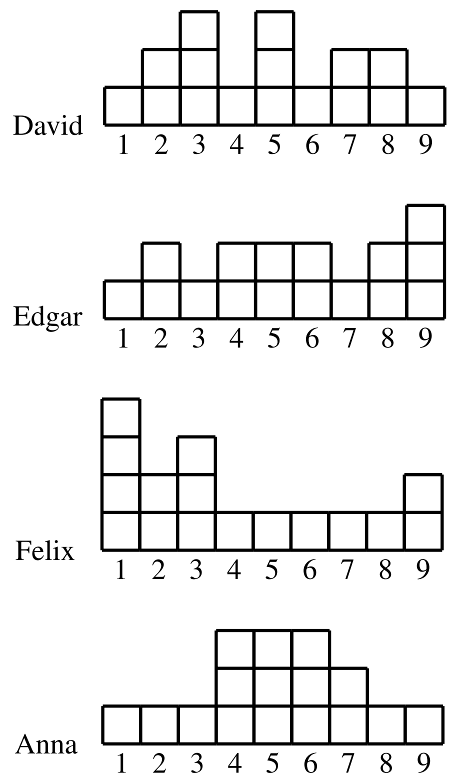
(c) Welcher Spieler kann prinzipiell (nicht nur im Beispiel oben) Neid empfinden? Gibt es Spieler, die garantiert keinen Neid empfinden, und wenn ja, welche? Begründen Sie Ihre Anworten.

(d) Passen Sie die Bewertungsfunktionen der Spieler derart an, dass eine *erneute* Anwendung des Protokolls zu einer neidfreien Aufteilung führt. Keine der vier neuen Bewertungsfunktionen dürfen paarweise identisch sein. Kennzeichnen Sie dafür in der Vorlage auf Seite 8 die Änderungen *deutlich* durch Streichen und Hinzufügen der entsprechenden Boxen.

Begründen Sie, weshalb die Änderung zu dem gewünschten Ergebnis führt.

Aufgabenteil (a)

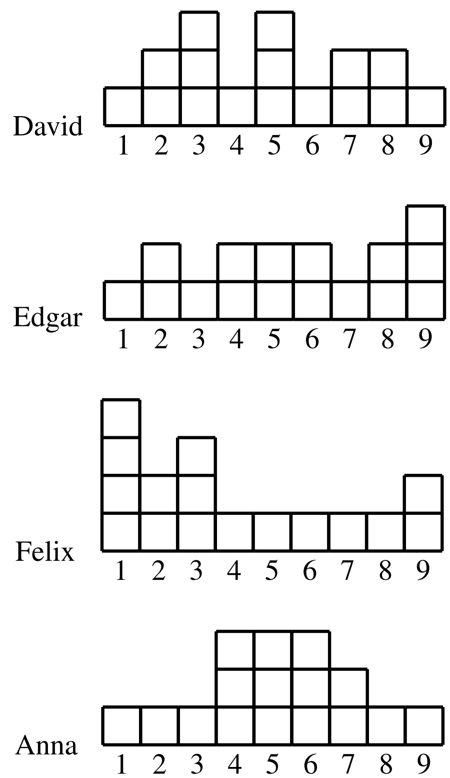
Schritt 1: Tragen Sie die Markierungen aller Spieler ein und kennzeichnen Sie, welcher Spieler mit welcher Portion ausscheidet.



Aufgabenteil (a)

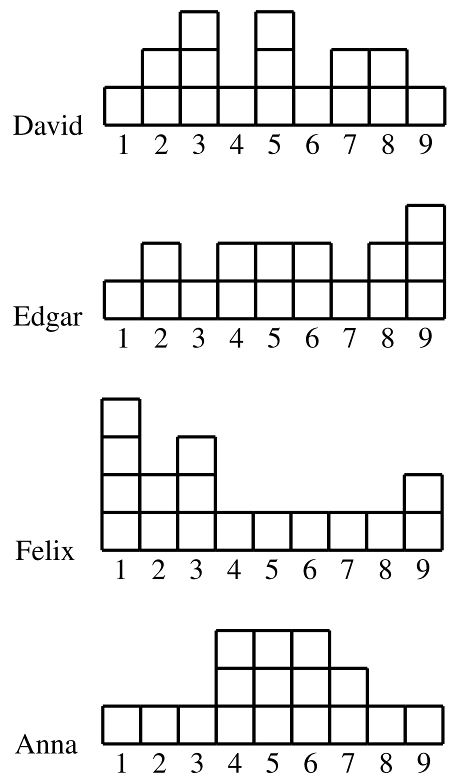
Schritt 5: Streichen Sie die Bewertungsfunktion des bereits ausgeschiedenen Spielers aus der Vorlage heraus und kennzeichnen Sie, welcher Teil des Kuchens bereits vergeben ist.

Führen Sie die einzelnen Schritte des Selfridge-Conway-Protokolls aus. Geben Sie bitte die Spielerreihenfolge explizit an.



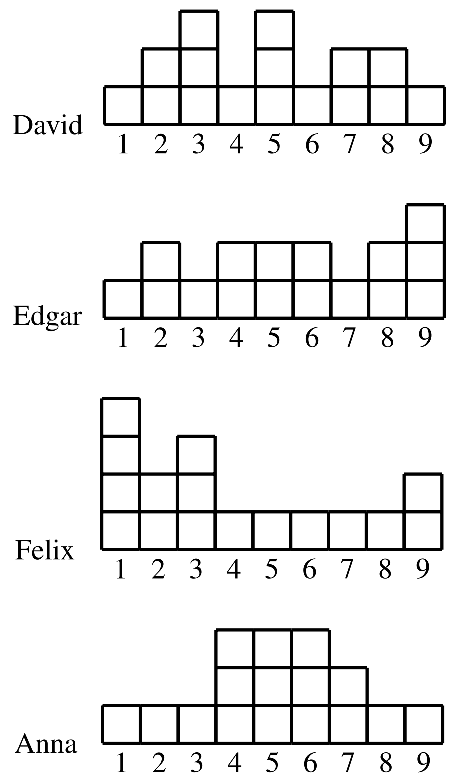
Aufgabenteil (a)

Tragen Sie die resultierende Gesamtaufteilung (inklusive des Anteils des in Schritt 3 ausgeschiedenen Spielers) in die folgende Vorlage ein und geben Sie die Bewertungen aller Portionen aus der Sicht aller Spieler und alle Neidrelationen an.



Aufgabenteil (d)

Passen Sie die Bewertungsfunktionen der Spieler derart an, dass eine *erneute* Anwendung des Protokolls zu einer neidfreien Aufteilung führt. Keine der vier neuen Bewertungsfunktionen dürfen paarweise identisch sein. Kennzeichnen Sie dafür in der folgenden Vorlage die Änderungen *deutlich* durch Streichen und Hinzufügen der entsprechenden Boxen.



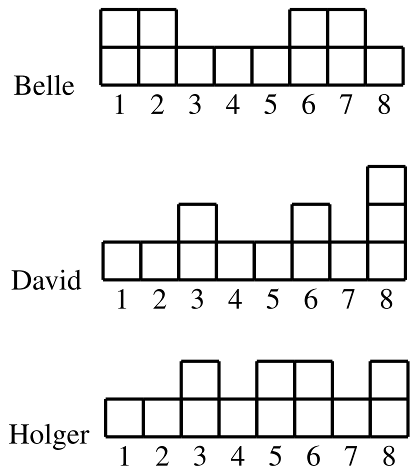
Begründen Sie, weshalb die Änderung zu dem gewünschten Ergebnis führt.

Aufgabenteile (b) und (c) nicht vergessen!

(Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Argumentation vollständig und verständlich ist!)

Aufgabe 3 (20 Punkte) Holger hat ein Eis mitgebracht und bietet Belle und David an, es sich mit ihm zu teilen. Da Belle und David schon so viel Kuchen gegessen haben, sind sie damit einverstanden, dass Holger mehr als jeder von ihnen bekommt. Belle und David sind in etwa gleich satt, deswegen wollen sie denselben Anteil am Eis haben. Holger hingegen soll doppelt so viel wie David bekommen.

Um das Eis zwischen Belle, David und Holger (in dieser Reihenfolge) aufzuteilen, soll das Lone-Divider-Protokoll mit ungleichen Anteilen Anwendung finden. Die Bewertungen des Eises sind wie folgt.



(a) Geben Sie die genauen Anteile an, die die Spieler mindestens erhalten sollen, sowohl normiert als auch als die Anzahl der Boxen, die ihre Portion jeweils mindestens umfassen soll.

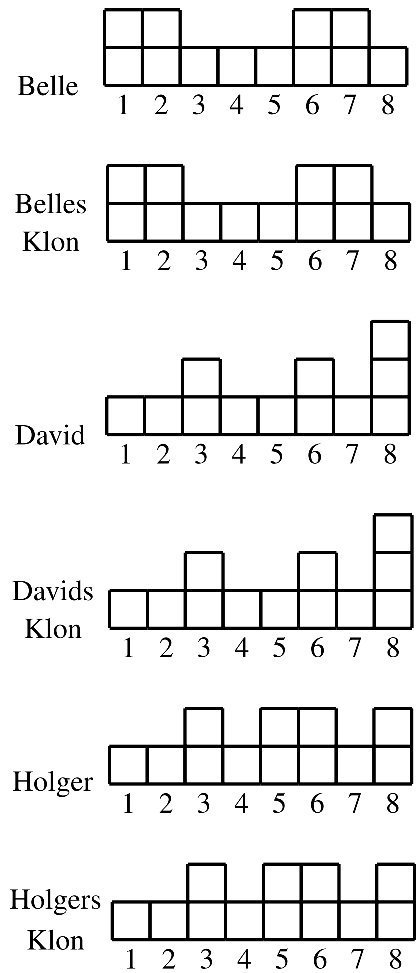
(b) Welcher Spieler erhält wie viele Klone? Geben Sie sie an, benennen Sie sie passend und geben Sie die „neue“ Spielerreihenfolge an. (Die Klone sind dabei direkt hinter den zugehörigen Spielern einzuordnen.)

(c) Wenden Sie das Lone-Divider-Protokoll auf die gegebenen Bewertungsfunktionen an und benutzen Sie dafür die Vorlagen auf den Seiten 10 und 11. Nicht benötigte Klone sind zu streichen und ebenso die Bewertungsfunktionen bereits ausgeschiedener Spieler. Markieren Sie in fortgeschrittenen Runden deutlich, welcher Teil des Eises bereits verteilt ist. Geben Sie, immer wenn nötig, in einer Tabelle an, welcher Spieler welche Stücke als akzeptabel ansieht und welche nicht.

(d) Geben Sie die Aufteilung ohne Klone in der Vorlage auf Seite 12 an. Geben Sie die Bewertungen aller Portionen aus Sicht aller Spieler an. Hat jeder Spieler mindestens seinen gewünschten Anteil erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

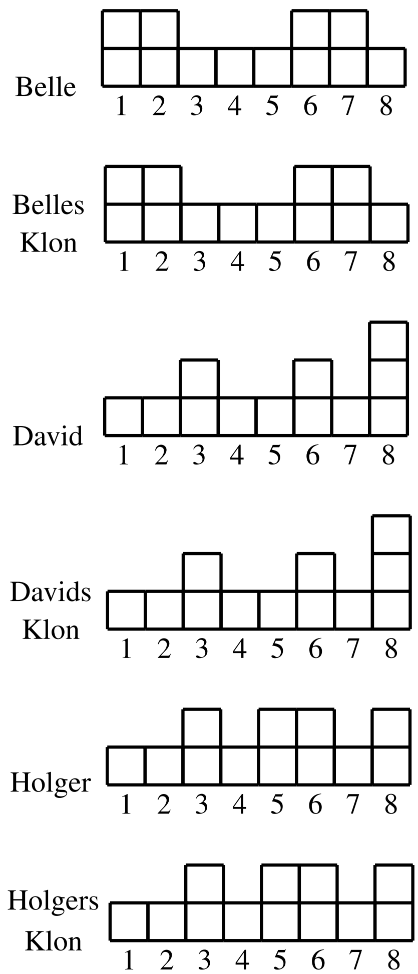
Aufgabenteil (c)

Erster Durchlauf: Nicht benötigte Klone sind zu streichen. Geben Sie, immer wenn nötig, in einer Tabelle an, welcher Spieler welche Stücke als akzeptabel ansieht und welche nicht.



Aufgabenteil (c)

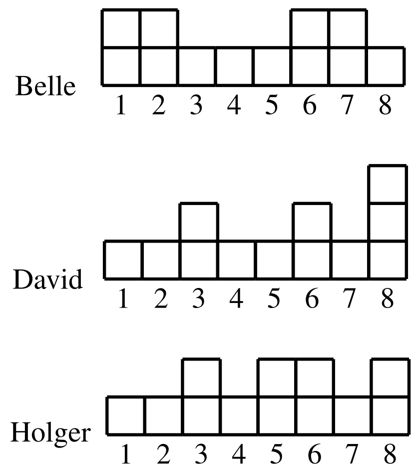
Zweiter Durchlauf: Nicht benötigte Klone und bereits ausgeschiedene Spieler sind zu streichen. Markieren Sie deutlich, welcher Teil des Eises bereits verteilt ist. Geben Sie, immer wenn nötig, in einer Tabelle an, welcher Spieler welche Stücke als akzeptabel ansieht und welche nicht.



Aufgabenteil (d)

Geben Sie die Aufteilung ohne Klone in der folgenden Vorlage an. Geben Sie die Bewertungen aller Portionen aus Sicht aller Spieler an. Hat jeder Spieler mindestens seinen gewünschten Anteil erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Aufteilung



Aufgabe 4 (16 Punkte) Gegeben sei die folgende abgeänderte Version des Last-Diminisher-Protokolls, in der Schritt 4 ausgetauscht wird durch

> **Schritt 4:** Wiederhole Schritt 1 bis 3 bis $n = 1$. Der letzte verbleibende Spieler bekommt den verbleibenden Kuchen.

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben nehmen Sie bitte an, dass stets von links geschnitten wird.

(a) Ist diese Version proportional? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist diese Version Pareto-optimal? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Edgar, David, Chris, Anna, Holger, Belle und Felix wenden das abgeänderte Last-Diminisher-Protokoll in dieser Reihenfolge an. Bekannt ist, dass

- es in Runde 1 keine Diminisher gibt,
- in Runde 2 nur Chris und Holger Diminisher sind,
- in Runde 3 Felix der einzige Diminisher ist und
- es in Runde 4 keinen Diminisher gibt.

Beantworten Sie mit diesen Informationen die folgenden Fragen. Eine Begründung der Kreuze ist nicht nötig und gibt auch keine Punkte.

1) ☐ Ja ☐ Nein Schritt 1 wird 6-mal ausgeführt.

2) ☐ Ja ☐ Nein Schritt 1 wird 7-mal ausgeführt.

3) ☐ Ja ☐ Nein Felix bekommt seine Portion in Runde 5.

4) ☐ Ja ☐ Nein David bekommt seine Portion in Runde 4.

5) ☐ Ja ☐ Nein Holger schneidet in Runde 2 als Zweiter.

6) ☐ Ja ☐ Nein Belle könnte David beneiden.

7) ☐ Ja ☐ Nein Edgar schneidet in Runde 2 als Erster.

8) ☐ Ja ☐ Nein Felix schneidet in Runde 4 als Zweiter.

Aufgabe 5 (14 Punkte) Es sei eine Aufteilung des Kuchens $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ gegeben, wobei X_i die Portion des i-ten Spielers ist.

Zur Erinnerung: Eine Portion X_i heißt *zusammenhängend*, falls es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ gibt, so dass gilt: $X_i = [x_1, x_2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$.

(a) Welches der folgenden Protokolle *garantiert jedem* Spieler *immer* eine zusammenhängende Portion? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(i) Das Moving-Knife-Protokoll von Austin.

(ii) Das Moving-Knife-Protokoll von Dubins und Spanier.

(iii) Das Moving-Knife-Protokoll von Stromquist.

(iv) Das Moving-Knife-Protokoll von Brams, Taylor und Zwicker.

(b) Folgendes wurde in den Übungen in Aufgabe 1 auf Blatt 6 gezeigt.

Gegeben sei ein Cake-cutting Protokoll π für $n \geq 2$ Spieler. Falls π jedem Spieler immer eine zusammenhängende nichtleere Portion garantiert, so ist π nicht Pareto-optimal.

Kann hier statt der Implikation sogar die Äquivalenz beider Aussagen gezeigt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

π ist ein endliches proportionales Cake-cutting-Protokoll, das für 3 Spieler genau 2 Schnitte benötigt.

$$\Rightarrow$$

π ist Pareto-optimal.

(Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Argumentation vollständig und verständlich ist!)

Aufgabe 6 (10 Punkte) Der Gesamtnutzen $\mathcal{U}(A)$ einer Aufteilung $A = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eines Kuchens $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ unter n Spielern p_i mit Bewertungsfunktionen v_i, $1 \leq i \leq n$, sei definiert durch

$$\mathcal{U}(A) = \sum_{i=1}^{n} v_i(X_i),$$

wobei X_i die Portion sei, die Spieler p_i erhält.

Ein Protokoll π nennen wir $\mathcal{U}$-optimal, wenn es zu jeder Aufteilung A, die es erzeugt, keine alternative Aufteilung A' gibt, die einen größeren Gesamtnutzen als A hat, ohne dabei mindestens einen Spieler schlechter zu stellen.

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Ein Protokoll π, das für $n = 2$ Spieler eine Aufteilung $A = (X_1, X_2)$ mit $X_1 \neq \emptyset$ und $X_2 \neq \emptyset$ mit genau 2 Schnitten erzeugt, kann nicht $\mathcal{U}$-optimal sein.

(Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Argumentation vollständig und verständlich ist!)