Prof. J. Rothe Düsseldorf, 26.05.2016

Übung zur Vorlesung im SS 2016
Cake-cutting Algorithms

Kreativaufgabe, Abgabe (Briefkasten oder E-Mail) am 16. Juni 2016 bis 8:35 Uhr

Die Abgabe der vollständig bearbeiteten Aufgabe kann einmal Vorrechnen für die Klausurzulassung ersetzen. Die Lösungen zu dieser Aufgabe können je nach Bedarf und verfügbarer Zeit in den Übungen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Prozeduren für stückweise konstante Bewertungen): Gegeben seien n stückweise konstante Bewertungsfunktionen. Geben Sie je eine Aufteilungs-Prozedur an, die

(a) gleichverteilt, exakt und neidfrei ist,

(b) Pareto-optimal ist und die utilitaristische Wohlfahrt über alle möglichen Aufteilungen maximiert.

Zeigen Sie jeweils, dass die geforderten Eigenschaften erfüllt sind.

Grundlagen:

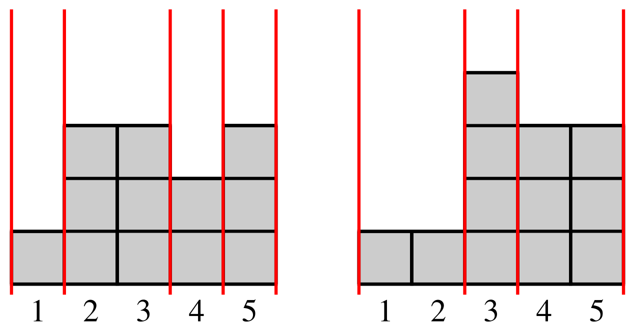
- Eine (zentralisierte) *Aufteilungs-Prozedur* ist – ähnlich wie ein Protokoll – eine Vorschrift, um für eine Cake-cutting-Instanz (also eine Menge von n Bewertungsfunktionen) eine Aufteilung des Kuchens in n Portionen zu erzeugen. Wie bei den Protokollen betrachten wir hier nur vollständige Aufteilungen des Kuchens, bei denen kein Rest übrig bleibt. Anders als bei Protokollen hat eine Prozedur allerdings vollständiges Wissen über die Bewertungsfunktionen aller Spieler und trifft alle Entscheidungen zentral.

- Jede Bewertungsfunktion v_i eines Spielers i kann durch eine *Dichtefunktion* $d_i : X \to [0,\infty)$ dargestellt werden. Diese bildet jeden Wert $x \in X$ auf eine reelle Zahl ab, welche angibt, wie “dicht” die Bewertung des Spielers an dieser Stelle ist. Die Bewertungsfunktion v_i des Spielers ist dann für jede Teilmenge $P \subseteq X$ gegeben durch:

$$v_i(P) = \int_P d_i(x)dx$$

  Zum Beispiel ist die in der Vorlesung verwendete Kästchendarstellung eine Darstellung der Dichtefunktion.

- Die Bewertungsfunktion v_i eines Spielers i heißt *stückweise konstant*, wenn $k_i \geq 2$ Intervallgrenzen $0 = \alpha_1^i < \cdots < \alpha_{k_i}^i = 1$ existieren, so dass die zur Bewertungsfunktion zugehörige Dichtefunktion innerhalb eines jeden Intervalls konstant ist. Insbesondere sind Bewertungsfunktionen in unserer Kästchendarstellung stets stückweise konstant. Betrachten Sie folgendes Beispiel:



(a) Anna (b) Belle

Die entsprechenden Intervallgrenzen $\{\alpha_1^{Anna}, \ldots, \alpha_5^{Anna}\}$ für Anna sind $\{0, {}^1\!/_5, {}^3\!/_5, {}^4\!/_5, 1\}$. Die Intervallgrenzen $\{\alpha_1^{Belle}, \ldots, \alpha_4^{Belle}\}$ für Belle sind $\{0, {}^2\!/_5, {}^3\!/_5, 1\}$.

- Die *utilitaristische Wohlfahrt* einer Aufteilung in n Portionen $X_1, \ldots, X_n$ ist die Summe der Bewertung eines jeden Spielers für die eigene Portion:

$$\mathscr{U}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(X_i)$$